Marcelo Rufino de Oliveira nasceu em 1976 em Manaus-AM, cidade onde seus pais trabalhavam na época. Sua família é originária de Belém-PA, cidade onde passou a maior parte de sua vida. Ingressou em 1994 no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), onde graduou-se em Eng. Mecânica-Aeronáutica em 1998, porém nunca exerceu a engenharia. Trabalhou por muitos anos na preparação de alunos para concursos militares e olimpíadas de matemática em Belém, tanto como professor quanto coordenador. Em 2000 assumiu a coordenação regional da Olimpíada Brasileira de Matemática no estado do Pará, sendo também responsável pela organização da Olimpíada Paraense de Matemática. Em 2002 participou do Tribunal de Coordenação da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza. Em 2019 aceitou o desafio de trabalhar nas escolas preparatórias para ITA e olimpíadas em Fortaleza, cidade que concentra a maior quantidade de alunos e os maiores resultados do Brasil.

Apesar de ter sua atuação mais conhecida na área de matemática, professor Rufino (como é mais conhecido) também ministra aulas de física para concursos militares e olimpíadas. Também é autor da coleção Técnicas em Olimpíadas de Matemática, do livro A Física no Vestibular do IME e também da coleção Elementos da Física.

Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro nasceu em 1977 em Belém-PA. Oriundo de família humilde, cursou todo o ensino médio nas Turmas Militares do Grupo Educacional Ideal. Foi aprovado nos concursos militares da Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), Academia da Força Aérea (AFA), Escola Naval, Instituto Militar de Engenharia (IME) e Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), além de ter conquistado, em 1995, o 1° lugar geral na Universidade da Amazônia (Unama). Ingressou no ITA em 1995, abandonando o curso no ano seguinte. A partir de 1997 passou a lecionar matemática em turmas preparatórias para concursos militares. Em 2004 finalmente graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPa). Em 2016 concluiu o mestrado profissional em Matemática pela UFPA.

9 786500 925470

Marcelo Rufino de Oliveira
Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

ELEMENTOS DA MATEMATICA

6

ELEMENTOS DA MATEMÁTICA

Marcelo Rufino de Oliveira
Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

$$d(P_0,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cy_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

6

Cálculo
IR^3
Lógica

$$(f.g)'=f'.g+f.g'$$

$$f(g(x))'=f'(g(x)).g'(x)$$

$$\int f'.g\,dx=f.g-\int f.g'dx$$

$$ax+by+cz.+d=0$$

$$P=(((p\rightarrow q)\wedge(\sim r\vee\sim q)\wedge r)\rightarrow\sim p)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$f(g(x))=\int f'(g(x)).g'(x)\,dx$$

COLEÇÃO ELEMENTOS DA MATEMÁTICA

VOLUME 6

Marcelo Rufino de Oliveira
Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Desde 1998 desenvolvendo trabalho como:
Coordenador de Turmas ITA/IME
Professor de Matemática de Turmas ITA/IME
Professor de Física de Turmas ITA/IME
Professor de Olimpíadas de Matemática

Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro
Com formação pela Universidade Federal do Pará (UFPa)
Professor de Matemática de Turmas ITA/IME

COLEÇÃO ELEMENTOS DA MATEMÁTICA 6

Marcelo Rufino de Oliveira
Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

CÁLCULO
IR^3
LÓGICA

1ª edição (2024)

Copyright © 2024 by marcelo rufino de oliveira

Todos os direitos desta edição estão reservados
á Marcelo Rufino de Oliveira
Fortaleza – Ceará – Brasil
E-mail: marcelorufino@hotmail.com

Ilustração da Capa
Marcelo Rufino de Oliveira

LOUDES PACHECO
Ficha Catalografica

F48.....Oliveira, Marcelo Rufino de

Coleção elementos da matemática, 6: cálculo, IR^3, lógica / Marcelo Rufino de Oliveira, Márcio Rodrigues da Rocha Pinheiro. – 1 ed. – Fortaleza, 2024.
375 p.

ISBN: 978-65-00-92547-0

1. Matemática (Ensino Médio) 2. Matemática (Ensino Médio) – cálculo. 3. Matemática (Ensino Médio) – IR^3. 3 Matemática (Ensino Médio) – lógica. - Pinheiro, Márcio Rodrigues da Rocha. II. Título. III: Título: Cálculo. IV. Título: IR^3.V. Título: Lógica.

CDD: 510.7

FOTOCÓPIA

É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor, os transgressores serão punidos com base no artigo 7°, da lei 9.610/98. Denuncie o plágio ou cópias ilegais anonimamente através do correio eletrônico do autor :

marcelorufino@hotmail.com

Todo o conteúdo dessa obra encontra-se registrado
na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

E se eu não conseguir resolver algumas questões?

Professor Marcelo nunca teve a intenção de lançar solucionários de seus livros, apesar dos insistentes pedidos dos leitores, que sempre alegavam sentir dificuldades em resolver as questões propostas dos volumes da coleção Elementos da Matemática.

Pra sanar esse problema, em julho de 2023 professor Marcelo Rufino lançou cursos online onde as questões mais difíceis dos seus livros estão sendo resolvidas, pelo próprio autor, em vídeo. As resoluções das questões podem ser adquiridas separadamente ou dentro de cursos completos, que também incluem mais de 800 videoaulas gravadas de teoria e exercícios, tarefas semanais, simulados online e mentoria ao vivo.

Para adquirir os cursos online do professor Rufino digite no seu navegador o site abaixo ou leia o QR code.

https://marcelorufino.com.br

APRESENTAÇÃO À 1ª EDIÇÃO

A coleção Elementos da Matemática nasceu em 2006, com o lançamento dos volumes 1, 2 e 3. Em 2011 foi lançado o volume 0, em 2013 o volume 4 e em 2017 o volume 5. Esses seis volumes abrangem os conteúdos dos concursos militares de ensino fundamental, como Colégio Naval e Epcar, e de ensino médio, fundamentalmente o ITA e o IME. Porém, com o passar do tempo, candidatos de outros concursos militares também passaram a utilizar os volumes da coleção Elementos da Matemática em sua preparação. Especificamente os candidatos dos concursos da EFOMM e Escola Naval sempre solicitaram aos autores da coleção para incorporar um novo volume, que abrangesse os tópicos específicos de ensino superior que são cobrados nesses dois concursos da Marinha, a saber: Limite, Derivada, Integral, Vetor, Geometria Analítica em Três Dimensões e Lógica. Os autores sempre foram resistentes a essa solicitação, até porque, desde o lançamento da coleção, o público alvo da coleção sempre foi o concurseiro do ITA e IME, onde esses conteúdos não são cobrados.

Durante o ano de 2023 essa solicitação, principalmente no conteúdo de Cálculo, ficou mais frequente e os autores resolveram escrever mais um volume pra coleção, abordando esses conteúdos de nível superior que são cobrados nos concursos da EFOMM e Escola Naval.

Na verdade, sempre existiu a disponibilidade de vários livros sobre esses assuntos, entretanto, foram livros escritos para o publico de ensino superior, da área de exatas, com uma proposta mais teórica e contendo uma série de teoremas e resultados mais aprofundados, que não são aproveitados pelos concursos militares. Esses livros também não possuem um exercício sequer de provas de concursos militares. Assim, **o grande diferencial desse livro é propiciar um conteúdo de Cálculo, $\mathbb{R}^3$ e Lógica direcionado para concursos militares**, fechando uma lacuna que existia no mercado.

Apesar de não cair mais diretamente nos concursos militares do ITA e IME, os autores dessa obra sugerem fortemente que os candidatos desses concursos dominem os conceitos abordados nesse livro, principalmente Cálculo. Diversos exercícios desses vestibulares têm solução mais simples e aceitas pela banca corretora utilizando técnicas de derivada ou integral. Além disso, um aluno só vai conseguir entender perfeitamente os conceitos das grandezas físicas se compreender limite, derivada e integral.

A invenção do Cálculo foi uma verdadeira revolução dentro da matemática. Na época houve uma grande controvérsia sobre quem foi realmente que descobriu primeiro, o inglês Isaac Newton ou o alemão Leibniz. Durante muito tempo essa discussão dividiu os matemáticos da Inglaterra e da Alemanha. Hoje se sabe que ambos fizeram suas descobertas de formas independentes e simultâneas, com Newton iniciando seus estudos pela Derivada e Leibniz pela Integral.

Com o cálculo foi possível analisar o movimento dos corpos de forma instantânea, utilizando a geometria analítica e também permitiu a determinação precisa de áreas e volumes, que, à época, ainda era feito usando o método da

exaustão. Atualmente, o Cálculo é aplicado em diversas outras áreas, como a Física, a Química e a Economia.

O desenvolvimento da Geometria Analítica é devido a dois matemáticos franceses, Descartes e Fermat, que desenvolveram, de forma independente, métodos parecidos para caracterizar curvas por expressões algébricas, relacionando as coordenadas x e y num plano. A grande importância da geometria analítica é permitir que problemas algébricos possam ser interpretados de forma algébrica e que manipulações algébricas possam permitir encontrar resultados geométricos.

Essa via de mão dupla da geometria analítica revolucionou os estudos da matemática e permitiu, algum tempo depois, que o Cálculo fosse criado por Newton e Leibniz.

É difícil precisar qual foi o primeiro trabalho publicado sobre Lógica Matemática. Há textos de Platão sobre o assunto, porém não como estudamos a Lógica atualmente. Quem primeiro apresentou um trabalho mais amplo, sistematizado e rigoroso sobre a Lógica foi Aristóteles, numa época que a Filosofia e a Matemática andavam de mãos dadas. Os conceitos da lógica aristotélica foram aceitos e ensinados por muitos séculos, até pelo menos o início do século XIX.

A coleção Elementos da Matemática passou por vários formatos de divisão de conteúdos e autores em seus volumes. Atualmente, a coleção está organizada da seguinte maneira:

Volume 0 – Álgebra, Aritmética, Proporção e Frações
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 1 – Conjuntos, Funções e Teoria dos Números
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 2 – Geometria Plana
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 3 – Sequências, Combinatória, Probabilidade e Matrizes
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 4 – Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 5 – Geometria Espacial e Trigonometria
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 6 – Cálculo, $\mathbb{R}^3$ e Lógica
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Os autores

Índice

Capítulo 1. Limite
1. Introdução 1
2. Vizinhança de Um Ponto 2
3. Limites e Gráficos – Noções Intuitivas 3
4. Alguns Resultados Importantes 8
5. Limites do Tipo 0/0 35
6. Mudança de Variável 39
7. Funções Contínuas 43

Exercícios Propostos 54

Capítulo 2. Derivada
1. Introdução 68
2. O Problema da Reta Tangente 69
3. Derivada de uma Função num Ponto 70
4. A Função Derivada 72
5. Regras de Derivação 73
6. Derivadas das Principais Funções 76
7. Derivadas Sucessivas 82
8. Derivadas Implícitas 83
9. Máximas e Mínimo de uma Função 93
10. Funções Côncavas e Convexas 108
11. Construção de Gráficos de Funções 113
12. Taxas Relacionadas 120
13. Aplicações de Derivadas 124
14. Regra de L'Hopital 134

Exercícios Propostos 139

Capítulo 3. Integral
1. Introdução 173
2. Propriedades da Integral 175
3. Teorema Fundamental do Cálculo 176
4. Áreas Compreendidas por Dois Gráficos 179
5. Determinação de uma Primitiva 181
6. Comprimento de um Arco 205
7. Volume de Sólidos de Revolução 207
8. Área de Superfícies de Revolução 209
9. Integrais Impróprias 213

Exercícios Propostos 217

Capítulo 4. Vetores

1. Segmentos Orientados ... 233
2. Adição de Vetores (Forma Geométrica) ... 234
3. Multiplicação de Número Real por Vetor (Forma Geométrica) ... 235
4. Sistema de Eixos Cartesianos ... 236
5. As componentes de um Vetor (Forma Algébrica) ... 239
6. O Módulo de um Vetor (Forma Algébrica) ... 240
7. Soma de Vetores (Forma Algébrica) ... 241
8. Multiplicação de um Vetor por um Escalar (Forma Algébrica) ... 242
9. Vetor Definido Por Dois Pontos (Forma Algébrica) ... 243
10. Vetor Definido pelo Vetores Unitários (Forma Algébrica) ... 243
11. Produto Escalar (Forma Algébrica) ... 247
12. Produto Vetorial ... 253
13. Produto Misto ... 256

Exercícios Propostos ... 263

Capítulo 5. Geometria Analítica no IR^3

1. Equação de um Plano ... 272
2. Condição para um Ponto Pertencer a um Plano ... 275
3. Interseção de um Plano com os Eixos Coordenados ... 275
4. Equação Segmentária de um Plano ... 276
5. Plano Normal a um Vetor e que Passa por um Ponto ... 277
6. Condição de Paralelismo ... 278
7. Condição de Ortogonalidade ... 279
8. Distância de um Ponto a um Plano ... 279
9. Distância Entre Planos Paralelos ... 280
10. Planos Bissetores ... 280
11. Ângulo Entre Dois Planos ... 281
12. Projeção de um Ponto Sobre um Plano ... 281
13. Equação da Reta no IR^3 ... 285
14. Posições Relativas Entre Duas Retas no Espaço ... 290
15. Ângulo Entre Duas Retas ... 298
16. Posições Relativas Entre Reta e Plano ... 298
17. Ângulo Entre uma Reta e um Plano ... 300
18. Superfícies Quádricas ... 306

Exercícios Propostos ... 313

Capítulo 6. Lógica

1. Proposição ... 325
2. Negação ... 326
3. Proposição Simples e Composta ... 326
4. Condicionais ... 328
5. Tautologias ... 329
6. Contradição ... 330
7. Argumento Válido ... 331
8. Negação de Proposições Compostas ... 332

Exercícios Propostos ... 338

Gabaritos ... 357

LIMITE

1.1. INTRODUÇÃO

Suponha-se que um corpo se move segundo a equação horária $s(t) = 6 - 3t + t^2$, no S.I. Calculando a velocidade média entre os instantes t_0 e $t = t_0 + \Delta t$, com $t \neq t_0$, obtém-se:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left[6 - 3(t_0 + \Delta t) + (t_0 + \Delta t)^2\right] - (6 - 3t_0 + t_0^2)}{\Delta t} = \frac{-3\Delta t + 2t_0\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$$

Como se está supondo $\Delta t \neq 0$, conclui-se que

$$v_m = \frac{-3\Delta t + 2t_0\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-3 + 2t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = -3 + 2t_0 + \Delta t \quad \textbf{(I)}$$

Assim, por exemplo, entre os instantes $t_0 = 2$ s e $t = 5$ s, a velocidade média é de 4 m/s; entre $t_0 = 2$ s e $t = 3$ s, tem-se $v_m = 2$ m/s; e entre $t_0 = 2$ s e $t = 2{,}00000001$s, obtém-se $v_m = 1{,}00000001$ m/s.

Para calcular a velocidade dita *instantânea* em $t_0 = 2$ s, o genial Isaac Newton fazia $\Delta t = 0$ s, na equação **(I)**. Assim, obtinha tal velocidade igual a $v_m = v_2 = -3 + 2.2 = 1$ m/s. E, para um instante t_0 genérico, a velocidade instantânea era igual a:

$$v_{t_0} = -3 + 2t_0 \quad \textbf{(II)}$$

A equação da velocidade obtida é perfeitamente condizente com a equação horária dada, mas havia um fato que intrigava físicos e matemáticos por todos os lugares. Para obtê-la, Newton deliberadamente tomava $\Delta t = 0$ s. Mas isto é inaceitável, uma vez que a igualdade anterior $\frac{\Delta t(-3 + 2t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = -3 + 2t_0 + \Delta t$ é verdadeira se, e somente se, $\Delta t \neq 0$, pois não pode existir, **em hipótese alguma,** divisão por zero. Como resolver este paradoxo?

Newton, assim como Leibniz, independentemente, obtiveram outros resultados corretos, como o cálculo de áreas de figuras irregulares, de modo semelhante, a saber: a partir de um ponto inicial, forneciam um acréscimo *não nulo* à variável do problema. Em seguida, após algumas manipulações algébricas, "forçavam a barra", fazendo aquele mesmo acréscimo (não nulo) ser *igual a zero*, a fim de obter uma taxa de variação instantânea. Do ponto de vista técnico, este procedimento previu e justificou de modo incrivelmente correto vários fenômenos quantificáveis. Tornou-se rapidamente a maior ferramenta matemática de todos os tempos: o **Cálculo Diferencial e Integral**, que nascia a partir de raciocínios completamente dinâmicos, porém que não conseguiam satisfazer a barreira do formalismo próprio da Matemática.

Só aproximadamente dois séculos adiante é que o problema foi resolvido, através de uma abordagem estática do conceito de derivadas. O brilhante matemático francês Cauchy foi um dos pioneiros a abandonar as ideias geométricas, porém

intrigantes, do conceito de derivada. Introduziu-se assim a definição de **limites** de funções, para bem definir o Cálculo desenvolvido por Newton e por Leibniz. Surgia a **Análise Matemática**, o sustentáculo que livrava aquele importantíssimo instrumento das lacunas teóricas do passado.

Nestas linhas, contudo, será valorizada, quase que exclusivamente, a faceta dinâmica, apresentando-se apenas a parte prática (dinâmica) do Cálculo. Inicia-se, entretanto, por uma abordagem um tanto elementar do conceito de limite.

1.2. VIZINHANÇA DE UM PONTO

Nas situações seguintes, considera-se $\delta > 0$. Seja x_0 um número real qualquer. Denominar-se-á **vizinhança de x_0**, de comprimento 2δ, ou ainda, uma δ-vizinhança de x_0, um intervalo (ou, mais precisamente, uma união de intervalos) de centro x_0 e raio δ, da forma:

$$V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$$

Naturalmente, afirmar que um real x pertence a uma vizinhança V_δ de x_0 equivale a escrever, sucessivamente:

$x \in V_\delta(x_0) \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ e $x \neq x_0 \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta$ e $x \neq x_0$, ou seja:

$$x \in V_\delta(x_0) \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$$

Exemplos:

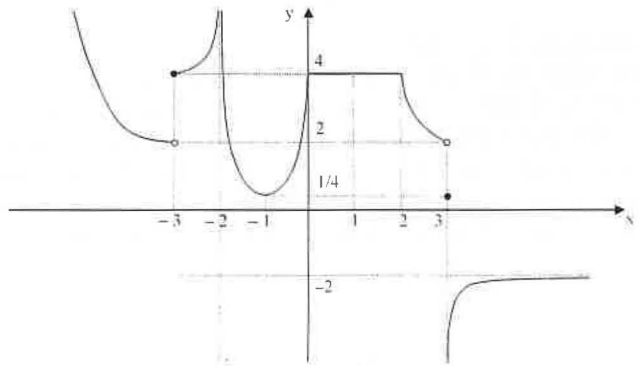
a) Sendo $\delta = 2$, a δ-vizinhança em torno de -3 é dada por $(-5, -1)$, com exceção do próprio -3. Assim, os números -4, $-\frac{7}{6}$, $-\pi$, $-\sqrt{2}$ estão em $V_2(-3)$.

b) Para que o número $\pi^2 \approx 9{,}8696$ pertença a uma vizinhança de 10, deve-se ter o raio de tal vizinhança igual ou superior a $10 - \pi^2 \approx 0{,}1304$. Por exemplo, fazendo $\delta_1 = 0{,}15$, π^2 pertence a $V_{\delta_1}(10)$. Mas com $\delta_2 = 0{,}13$, a vizinhança $V_{\delta 2}(10) = (9{,}87; 10{,}13)$ não engloba π^2.

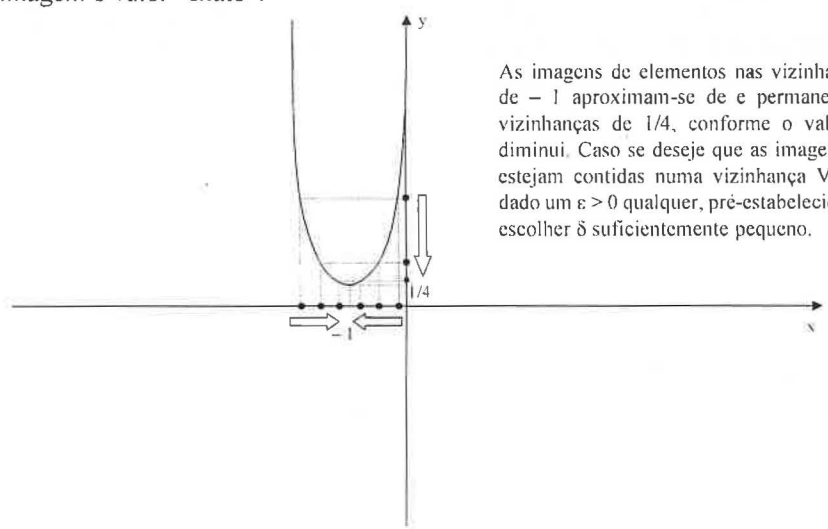
Será útil também definir *semivizinhanças* de um número real dado, x_0. Há dois tipos importantes. Uma **semivizinhança à direita** de x_0 será um intervalo da forma $V_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$. Já uma **semizinhança à esquerda** de x_0 é qualquer intervalo do tipo $V_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$. Os significados geométricos desses intervalos claramente justificam as denominações empregadas.

1.3. LIMITES E GRÁFICOS – NOÇÕES INTUITIVAS

Observe-se o gráfico de uma função $f: R - \{-2\} \to R$, em que $y = f(x)$, a seguir.



Imagine-se, a partir daqui, um ponto de abscissa x_1 "deslocando-se" sobre o eixo x. Ao aproximar-se de (**sem chegar a**) $x_0 = -1$, tanto por valores menores (à esquerda) quanto por valores maiores (à direita), nota-se que as imagens tendem a "concentrar-se" em torno de $L_0 = 1/4$, ainda que todas estejam "acima" e sejam diferentes de 1/4. A ideia, daqui por diante, é: quanto *menor* a vizinhança em torno de x_1, *melhor* a aproximação observada nas imagens. Como se fosse uma espécie de **refinamento da precisão** da medida, isto é, uma diminuição do erro, considerando a imagem o valor "exato".

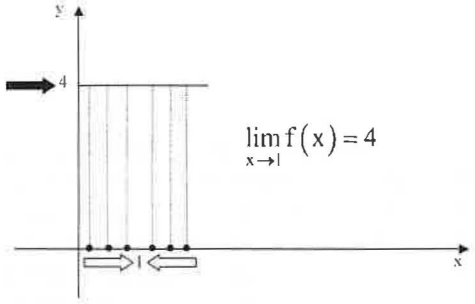


As imagens de elementos nas vizinhanças V_δ de -1 aproximam-se de e permanecem em vizinhanças de 1/4, conforme o valor de δ diminui. Caso se deseje que as imagens de V_δ estejam contidas numa vizinhança V_ε, sendo dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, pré-estabelecido, basta escolher δ suficientemente pequeno.

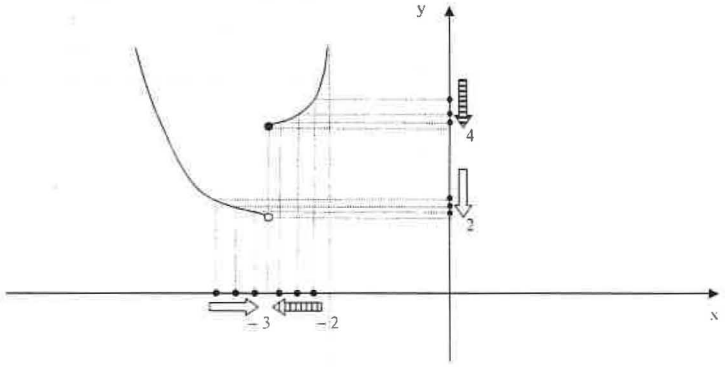
Diz-se que o **limite de $f(x)$ quando x tende a – 1 é igual a 1/4**. Com mesmo significado, tem-se que, numa vizinhança de – 1, o conjunto das imagens $f(x)$ **converge para 1/4**. Indica-se tal fato pela simbologia:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1}{4}$$

Similarmente, concentrando os valores x do domínio em vizinhanças de $x_1 = 1$, novamente quer pela esquerda, quer pela direita, percebe-se intuitivamente que as imagens $f(x)$ acumulam-se ao redor de $L_1 = 4$, mesmo sem alcançar $x_1 = 1$. Em verdade, neste caso, todas as imagens são iguais a 4, mas isto é irrelevante, sob a ótica da teoria formal de limites. O que importa na determinação do limite das imagens de uma função é o que acontece numa vizinhança (comumente "minúscula") do ponto x_1, mas não necessariamente o que ocorre com $f(x_1)$.



É fundamental observar o que sucede em vizinhanças ("pequenas") em torno de $x_2 = -3$. Caso x se aproxime de – 3 pela esquerda, nota-se que as imagens $f(x)$ aglomeram-se ao redor de 2 (ainda que, exclusivamente, por meio de valores maiores que 2). Já ao tender a – 3 pela direita, é notório que as imagens $f(x)$ tornam-se mais próximas de 4 e não saem mais de perto de lá.



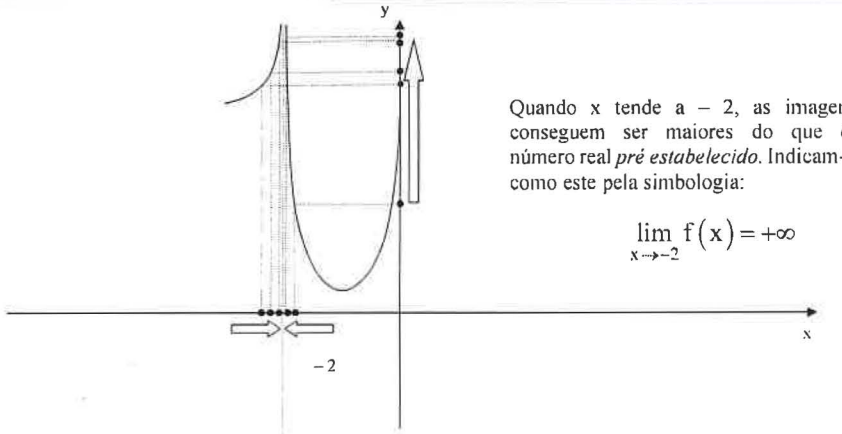
Como se sabe, elemento algum do domínio de uma função pode ter mais que uma imagem, tal qual – 3. De modo análogo, a definição de limite é criada de maneira que as imagens não podem acumular-se em torno de dois valores distintos, quando x tende a um mesmo ponto. Noutros termos, *uma função jamais pode possuir dois limites diferentes, para uma mesma tendência.*

Faz-se necessária, desta forma, a ideia de **limites laterais**. No exemplo precedente, diz-se que **quando x tende a – 3 pela esquerda**, as imagens $f(x)$ aglomeram-se em torno de 2. E que **quando x tende a – 3 pela direita**, $f(x)$ tendem a 4. Indicam-se esses fatos com as seguintes notações:

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 2; \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = 4$$

Como esses limites laterais são distintos, afirma-se que $\lim_{x\to -3} f(x)$ ***não existe***. Importantíssimo ressaltar que o valor de $f(-3)$ é completamente irrelevante na determinação dos limites laterais tendendo a – 3. Em verdade, os casos mais interessantes na obtenção de um limite são aqueles em que a tendência não está no domínio da função. Isto deve ficar mais evidente nos exemplos subsequentes.

Suponha-se agora uma tendência para $x_3 = -2$, o qual **não pertence ao domínio de** f. Não faz sentido, portanto, falar em $f(-2)$. É conveniente atribuir algum significado ao símbolo $\lim_{x\to -2} f(x)$? A resposta é SIM, mas merece especial atenção. Tal limite não indica mais uma concentração de imagens das vizinhanças (cada vez menores) em torno de x_3, como nos exemplos anteriores. Pelo contrário, $\lim_{x\to -2} f(x)$ indicará uma espécie de "super dispersão" (ou ainda, uma "explosão") das imagens próximas a – 2. A ideia (intuitiva) é que, por maior que seja o número real pensado, pode-se obter uma vizinhança suficientemente próxima de – 2, de tal sorte que as imagens nesta vizinhança são capazes (todas elas) de superar o número dado. É como se, em vizinhanças diminutas de – 2, estivesse se confirmando o fato de o conjunto dos números reais (observados nas imagens) *não é limitado superiormente* (não há o maior de todos os números reais).



Quando x tende a – 2, as imagens f (x) conseguem ser maiores do que qualquer número real *pré estabelecido*. Indicam-se casos como este pela simbologia:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$$

Ressalte-se, como já feito no estudo de intervalos reais, que o símbolo + ∞ **não representa número real algum**. Aqui, em Cálculo, o símbolo ∞ também não indica um número real. Simplesmente, o que se quer indicar com a notação $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$ é que, em vizinhanças suficientemente pequenas em torno de – 2, as imagens conseguem ser tão grandes quanto (e maiores ainda do que) se deseja. Também é comum dizer que, em algumas vizinhanças de – 2, o conjunto das imagens f (x) **diverge**.

Para fixar ideias, considere-se a função g: R – {– 2} → R, definida por $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Suponha-se que alguém acredita na "superioridade suprema" do número $M = 69^{24!}$, chamando-o de "número enorme". No entanto, todo real na vizinhança à direita de – 2 (– 2, – 2 + $69^{-24!}$), como $x^* = -2 + 69^{-25!}$, por exemplo, tem imagem maior ainda que M, por g (note-se que é bastante razoável chamar x^* de um número muitíssimo próximo de – 2, já que M é enorme). Com efeito:

$$g(x^*) = \frac{1}{x^*+2} = \frac{1}{69^{-25!}} = 69^{25!} > 69^{24!} = M$$

Escreve-se, assim, $\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{1}{x+2}\right) = +\infty$, uma vez que as imagens de g só ficam *maiores do que qualquer real pré fixado*, em vizinhanças ("minúsculas") *à direita* de – 2. Novamente, cabe destacar que o fato de existir ou não f (– 2) influencia em praticamente nada o significado que se atribui ao símbolo $\lim_{x\to -2} f(x)$.

Mais interessante ainda é o que ocorre em vizinhanças de $x_4 = 3$. Existe f(3) (a saber, 1/4), mas $\lim_{x\to 3} f(x)$ não liga a mínima para essa existência. Quando x tende a

3 pela esquerda, já deve ser muito fácil perceber que as imagens acumulam-se em torno de 2 ($\neq f(3)$). Isto é representado, como visto, pela notação:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$$

No entanto, aproximando-se de 3 pela direita, nota-se analogamente à situação descrita anteriormente, que as imagens conseguem ser **menores que qualquer real dado previamente**. Desta forma, por menor que seja o número real dado, como – M = $-\ 69^{24!}$, é possível criar uma vizinhança à direita do 3, de modo que as imagens nessa vizinhança conseguem ser inferiores ao número "muitíssimo pequeno". Mais uma vez, portanto, as imagens de vizinhanças à direita de 3 nada têm a ver com a imagem de 3. Aqui, as imagens "dispersam-se" cada vez mais, para baixo. Indica-se isto pela notação:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

Como as tendências laterais das imagens em torno de 3 são distintas (as imagens "explodem para baixo", à direita de 3, e tendem a 2, pela esquerda), conclui-se que não faz sentido atribuir significado ao símbolo $\lim_{x\to 3} f(x)$.

Finalmente, ocorrem fatos extraordinários com as imagens da função quando os valores de x **crescem** ou **decrescem** indefinidamente (ou seja, sem limitações superiores ou inferiores, respectivamente). Diz-se que a variável **x tende a mais infinito** quando é maior que qualquer real dado de antemão. Indica-se pela simbologia **x** → + ∞. Intuitivamente, consegue-se observar graficamente que, conforme x vai ficando cada vez maior, as imagens concentram-se ao redor de – 2. Escreve-se:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -2$$

Se x fica menor do que qualquer real pensado, diz-se que **x tende a menos infinito**, representando-se por **x** → – ∞. Agora, as imagens vão ficando cada vez maiores, de tal forma que:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

1.4. ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES

Segue-se uma (grande) lista de propriedades de limites, incluindo várias operações úteis para a determinação de alguns limites de funções elementares. Uma vez que não foram apresentadas as definições de **limite de uma função real de variável real num ponto**, nem de **limites laterais**, nem de **limites infinitos** e nem de **limites no infinito**, tais propriedades visam, tão somente, à prática da obtenção de limites, sem preocupação com demonstrações ou mesmo com esboços delas (o que, naturalmente, *não* é boa Matemática). Ainda assim, as hipóteses de cada um dos teoremas seguintes devem ser minuciosamente estudadas, bem como, obviamente, as respectivas conclusões. Os exemplos deverão ser suficientes para compreender as propriedades.

Em todos os resultados seguintes, *f*, *g*, *h* serão funções reais de variável real, definidas em algum subconjunto $X \subset R$ (eventualmente, em domínios distintos, caso seja mencionado), sendo que o valor **a** *não necessariamente pertence a* X. Entretanto, deve existir alguma δ-vizinhança de **a** (ainda que lateral) inteiramente contida em X.

1.4.1. Unicidade Do Limite

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Este resultado não se trata de mera transitividade, mas sim justifica o uso correto das igualdades acima. O que este teorema afirma, noutras palavras é que o conceito de limite é **bem definido**, isto é, que uma mesma função não pode ter dois limites distintos, num mesmo ponto. Como visto no grande exemplo do item anterior e conforme um teorema seguinte (4.3), nem toda função possui limite num certo ponto. Mas, caso exista $\lim_{x\to a} f(x)$, *só pode haver um.*

1.4.2. Limite De Uma Função Constante

- Sendo *f*: R → R, dada por $f(x) = k$ ($k \in R$), tem-se que $\lim_{x\to a} f(x) = k$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Um tanto evidente (mesmo sem a posse da definição) que todas as imagens de uma função constante acumulam-se em uma vizinhança (de qualquer raio) em torno de k. Em verdade, *todas* as imagens são iguais ao valor k. Nesta propriedade, a tendência **a** pode ser corretamente substituída por $\mathbf{a}^+$, $\mathbf{a}^-$, $+\infty$ ou, ainda, por $-\infty$.

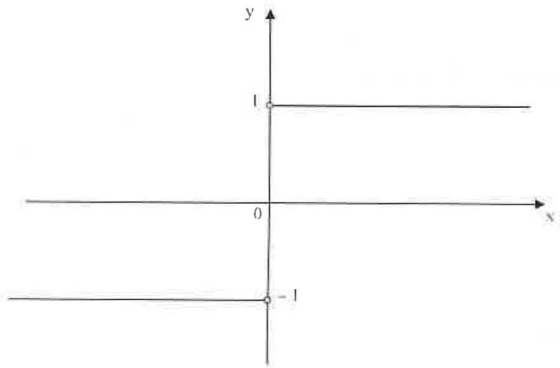
1.4.3. Existência Do Limite

- $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a^-} f(x)$; $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Embora não simplifique muito a decisão sobre a existência ou não do limite de uma função em **a** (pois devem ser verificadas as existências de outros dois limites – os laterais), é muito importante destacar que uma função possui limite num ponto **a** se, e somente se, os limites laterais existem e são iguais.

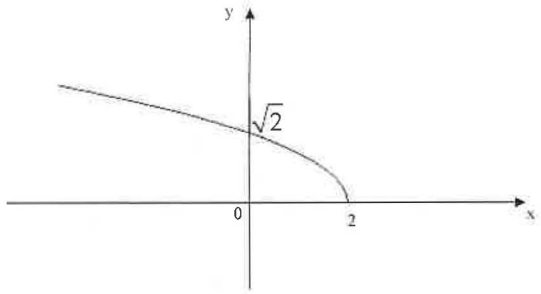
Exemplos:

a) Considere-se a função *f*: R* → R, definida pela expressão $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Como é evidente, tem-se que $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Assim, o gráfico de *f* pode ser representado a seguir:



Nota-se, intuitivamente, que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ e que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, uma vez que, em toda semivizinhança esquerda de 0, *f* é constante e igual a – 1, bem como em qualquer semivizinhança direita de 0 possui imagem constante e igual a 1. Portanto, **não existe** $\lim_{x\to 0} f(x)$.

b) Seja a função *f*: $[-\infty, 2] \to R^+$, de lei $f(x) = \sqrt{2-x}$. Observando que *f* é a função inversa de *g*: $R^+ \to [-\infty, 2]$, definida por $g(x) = 2 - x^2$, é muito fácil esboçar o gráfico de *f*, como se segue.



E como é fácil ver, conforme x se aproxima de 2 por valores menores, as imagens vão se concentrando em torno de 0. Porém, é **impossível** concluir o que ocorre com as imagens de uma semivizinhança direita de 2, pelo simples fato de nenhum destes intervalos estar contido no domínio de *f*. Portanto, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, mas não existe $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, nem, consequentemente, $\lim_{x\to 2} f(x)$.

1.4.4. Limite Como Conceito Local

- Se existe algum $\delta > 0$, tal que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in V_\delta(a)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Esta é uma propriedade muito útil no cálculo de limites e ensina que, caso duas funções tenham mesmas imagens em alguma vizinhança de **a**, **mas não necessariamente em a**, então a existência do limite em **a** para uma delas implica a existência do mesmo limite para a outra. Isto costuma ser resumido dizendo-se que o conceito de limite é *local*: não interessa (do ponto de vista teórico) o que ocorre com uma função num ponto; nem o que ocorre com a função em *qualquer* vizinhança de tal ponto (imagens muito "distantes" de **a** não influenciam na determinação do limite). Caso seja possível obter outra função que, **em alguma vizinhança desse ponto** (localmente, mas não pontualmente), produza o mesmo efeito (isto é, tenha mesmas imagens) que a primeira, pode-se utilizar este teorema para obter tal limite, mesmo que uma das funções esteja definida no ponto e outra não. Ou ainda, que em outros infinitos intervalos elas assumam valores diferentes. O que importa é que, nalguma vizinhança de **a**, as funções sejam idênticas.

Exemplos:

c) O que Newton fazia e causava controvérsia, tal qual mostrado nas linhas iniciais, pode ser reformulado assim: a velocidade instantânea de um corpo, sob a equação $s(t) = 6 - 3t + t^2$, num dado instante t_0, é em verdade o **limite** da função de lei $f(\Delta t) = \dfrac{-3\Delta t + 2t_0\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$, quando Δt tende a zero. Note-se que se tem uma função de Δt (a variável independente, portanto), não definida para $\Delta t = 0$. Contudo, a função afim $g(\Delta t) = -3 + 2t_0 + \Delta t$ está definida para todo Δt real e, como é fácil provar, é **idêntica a *f*, no conjunto R***. Conforme será visto adiante, *g* possui limite em todo R, sendo o limite em cada ponto real igual à imagem de tal ponto pela função *g*. Por conseguinte, pode-se afirmar, de acordo com o teorema 4.4, que:

$\lim_{\Delta t\to 0} g(\Delta t) = g(0) = -3 + 2t_0 = \lim_{\Delta t\to 0} f(\Delta t) = v_{t_0}$ (velocidade instantânea em t_0),

e o impasse fica resolvido. Muitos limites básicos são obtidos de modo semelhante a este.

d) Suponha-se que seja necessário calcular $\lim_{x\to 5}\left(\dfrac{10-2x}{x-5}\right)$. Note-se que a função de lei $f(x) = \dfrac{10-2x}{x-5}$ **não está definida** para x = 5. Contudo, a função de lei $g(x) = -2$ é *idêntica* a *f*, *para todo* $x \neq 5$. Com efeito: $\dfrac{10-2x}{x-5} = \dfrac{(-2)(x-5)}{x-5} = -2$, $\forall x \in R - \{5\}$. Logo, pelo teorema 4.4:

$\lim_{x\to 5}\left(\dfrac{10-2x}{x-5}\right) = \lim_{x\to 5}(-2) = -2$, conforme 4.2.

1.4.5. Operações Com Limites

- Sejam *f*, *g*: $X \to R$, tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, com $L, M \in R$.

Então:

I. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

II. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$;

III. se $M \neq 0$, $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$;

IV. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$, $\forall n \in Z^*$;

V. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para qualquer n ímpar e para **n par, desde que L > 0**;

VI. $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$;

VII. $\lim_{x\to a}\left[b^{f(x)}\right] = b^{L}$, para todo b, tal que $0 < b \neq 1$;

VIII. $\lim_{x\to a}\left[\log_b f(x)\right] = \log_b L$, para todo b, tal que $0 < b \neq 1$, com $\mathbf{L > 0}$;

Estes resultados são muito úteis na obtenção de limites básicos e, basicamente, podem ser resumidos assim:

Caso os limites de *f* e de *g* existam (e sejam reais), o limite de uma operação algébrica com *f* e *g* (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, modulação, exponenciação, logaritmação) é igual à operação algébrica com os respectivos limites, DESDE QUE O RESULTADO DESTA SEJA REAL. É como se o símbolo de limite pudesse ser "distribuído" em relação a operações aritméticas elementares.

É fácil provar, por indução sobre o número de termos, que as propriedades acima são válidas para uma *quantidade qualquer*, mas finita, de funções operandas. Assim, por exemplo, caso também exista $\lim_{x\to a} h(x) = N \in R$, deve-se ter $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right] = L+M-N$, $\lim_{x\to a}\left\{f(x)\left[g(x)-h(x)\right]\right\} = L(M-N)$, por exemplo. Daí, é imediato e resultado em IV, para $n \in N$, por indução sobre n, bem como para n inteiro negativo, com o auxílio de III. Particularmente, $\lim_{x\to a}\left(x^n\right) = a^n$, $\forall\, a \in IR$, $\forall\, n \in IN^*$.

Um caso especial importante da propriedade II, combinada com o teorema em 1.4.2, consiste no caso em que *g* é constante. Se existe $\lim_{x\to a} f(x) = L$, real, então $\forall\, k \in IR$ tem-se que $\lim_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right] = k\cdot L$, ou seja, uma constante pode ser retirada do (ou mesmo introduzida sob o) símbolo de limite.

Não se deve esquecer que, em toda esta introdução intuitiva ao estudo do Cálculo, lidam-se **exclusivamente com funções reais de variável real**. Isso justifica com alguma razão as restrições envolvidas nas propriedades em V, VII e VII.

Exemplos:

e) O limite de toda função afim de lei $f(x) = mx + n$ existe em qualquer tendência real. Com efeito,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(mx+n) \overset{I}{=} \lim_{x\to a}(mx) + \lim_{x\to a}(n) \overset{II}{=} m.\lim_{x\to a}(x) + \lim_{x\to a}(n) \overset{4.2}{=} m.\lim_{x\to a}(x) + n,$$

desde que exista $\lim_{x\to a}(x)$. Mas, como é fácil visualizar graficamente, $\lim_{x\to a}(x) = a$, qualquer que seja $a \in R$. Portanto, $\forall\, a \in R$, tem-se:

$$\lim_{x\to a}(mx+n) = ma + n$$

f) O resultado obtido no exemplo anterior é facilmente generalizável para qualquer função polinomial de grau n, dado. Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_sx^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i$. Aplicando sucessivamente as propriedades vistas até aqui, conclui-se que:

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right) \overset{I}{=} \sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to a}\left(a_ix^i\right) \overset{II}{=} \sum_{i=1}^{n}\left[\lim_{x\to a}(a_i)\right]\left[\lim_{x\to a}\left(x^i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_ia^i = P(a),$$

isto é, **o limite de um polinômio em qualquer ponto a é igual ao valor numérico do polinômio naquele ponto.**

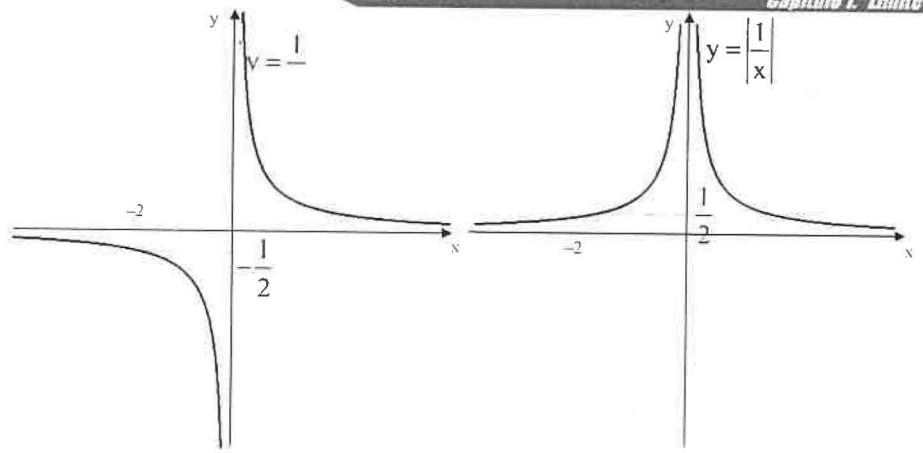
g) Algo inteiramente análogo ao que acontece em polinômios, ocorre também com funções exponenciais, logarítmicas e muitas outras funções elementares, em todos os pontos dos respectivos domínios. Assim: $\lim_{x\to a} 2^x = 2^a$, para todo valor real **a**; $\lim_{x\to a}\log_{\frac{1}{\pi}} x = \log_{\frac{1}{\pi}} a$, qualquer que seja o real *positivo* **a**; $\lim_{x\to a}\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{a}$, para qualquer real *positivo* **a**; $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{2-a}$, para todo real **a**. É crucial notar, todavia, que, apesar de $\lim_{x\to a}\sqrt{2-x} = \sqrt{2-a}$, para todo **a > 2**, **não existe o limite** $\lim_{x\to 2}\sqrt{2-x}$, como visto no exemplo b. Isto não destoa da propriedade V deste item, uma vez que $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ *apenas para* $L > 0$. Mas $\lim_{x\to 2}(2-x) = 0$.

h) A afirmação $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$ **é falsa**. Para que seja verdadeira, é necessário e suficiente que existam os limites reais $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$. É possível que algum dos dois últimos limites não exista (ou mesmo os dois), muito embora o primeiro esteja bem definido. Um exemplo bem simples é com $a = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$. Não existem os limites $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} g(x)$, mas $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = 0$. O mesmo ocorre para $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$.

i) Caso $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, nada se pode afirmar, previamente, sobre $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$. Se $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, como será visto adiante, o limite "explode", tendendo a infinito ($+\infty$

ou $-\infty$, podendo ocorrer diferenças pelas laterais). Mas se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, **muita coisa pode suceder**. Por exemplo, suponha-se que $f_1(x) = k(x-4)$ e $g_1(x) = x-4$, com k **real qualquer**. Conforme é evidente, $\lim_{x\to 4} f(x) = 0 = \lim_{x\to 4} g(x)$. Porém, $\lim_{x\to 4}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to 4}\left[\frac{k(x-4)}{(x-4)}\right] = \lim_{x\to 4} k = k$, ou seja, *o limite do quociente de duas funções que tendem a zero pode assumir um valor real qualquer*. Por causa disso, é usual dizer que a expressão **simbólica** (quer dizer, sem sentido formal) "$\frac{0}{0}$" representa o que se chama tradicionalmente **símbolo de indeterminação**. Trata-se tão somente de um recurso didático. Resumindo, quando se obtém, *no cálculo de limites*, uma expressão como "$\frac{0}{0}$", significa que deve ser utilizado outro caminho para tentar calcular o limite, que não a propriedade indicada em III. Quando se consegue, por intermédio de outros resultados, calcular tal limite, como feito em $\lim_{x\to 4}\left[\frac{k(x-4)}{(x-4)}\right] = k$, é costumeiro dizer-se que se **"levantou a indeterminação"**. Deve-se ressaltar, todavia, que esse limite pode não existir. Por exemplo, ao tentar-se obter o limite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}\right)$ pela utilização ***incorreta*** de III, encontra-se uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$" (pois $\lim_{x\to 0} x = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$). Como, entretanto, $x \neq 0$, tem-se $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, que, em vizinhanças de 0, não possui limite (real) algum.

j) Finalmente, é útil comentar que, caso exista $\lim_{x\to a} f(x) = L$, é fácil perceber (graficamente) que $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$. Por exemplo, $\lim_{x\to -2}\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$, enquanto $\lim_{x\to -2}\left|\frac{1}{x}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.



Porém, como é imediato, a recíproca desse teorema é falsa. Ou seja, o fato de ser $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$ não significa que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, a não ser no caso trivial em que L = 0. Basta ver, por exemplo, que, apesar de $\lim_{x\to -2}\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{2} = \left|\frac{1}{2}\right|$, não se tem $\lim_{x\to -2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

1.4.6. Limites Infinitos

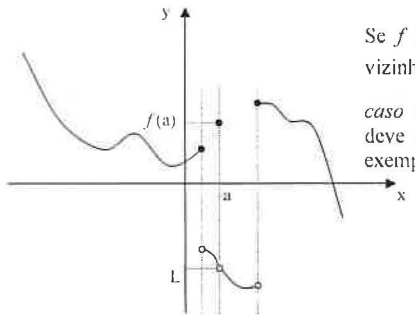
Suponha-se que $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Caso exista uma vizinhança $V_\delta(a)$, tal que $\forall\, x \in V_\delta(a)$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. No caso em que $\forall\, x \in V_\delta(a)$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Trata-se de um resultado central, suficiente para que as imagens de uma função "explodam", isto é, para que ocorra um limite infinito. Como é fácil notar elementarmente, ao dividir-se um valor real qualquer *não nulo* por uma quantia **infinitesimal** (isto é, com módulo tendendo a zero), o resultado tende a ficar cada vez maior, à medida que o denominador aproxima-se de zero. Por exemplo:

NÚMERO REAL QUALQUER, NÃO NULO $\quad \frac{5}{0,0000000001} = \frac{5}{10^{-10}} = 5.10^{10} = 50000000000.$

Nº INFINITESIMAL (MÓDULO MUITO PEQUENO)

É possível demonstrar um teorema conhecido como *permanência do sinal* para limites, segundo o qual, caso uma função φ possua limite positivo em **a**, então existe uma vizinhança de **a** em que as imagens φ (x) são, também, positivas. Analogamente no caso de o limite ser negativo. Vale uma espécie de recíproca: caso o sinal de uma função permaneça o mesmo numa vizinhança de **a** e tal função possua limite em tal ponto, este limite deve possuir o mesmo sinal da função naquela vizinhança.



Se f tem imagens negativas em alguma vizinhança de **a**, o limite $L = \lim_{x \to a} f(x)$, *caso exista*, não tem para onde "fugir": deve ser negativo, ainda que f (a), por exemplo, seja positivo.

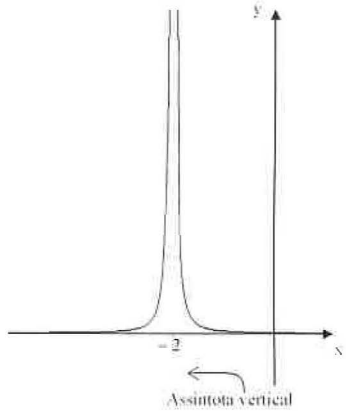
Deste modo, fica fácil concluir, ainda que de maneira intuitiva, que se uma função da forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ explode em torno de **a**, de tal sorte que numa vizinhança de **a** $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, por exemplo, obrigatoriamente a divergência deve ocorrer para $-\infty$. Raciocínio análogo vale para $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, situação em que a explosão é para $+\infty$. Como será analisado no exemplo m, este teorema pode ser adaptado para os limites laterais.

Exemplos:

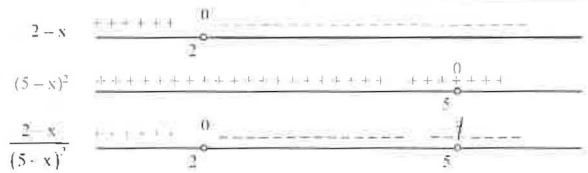
k) Considere-se a função real definida por $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. Quando $x \to -2$, ocorre, certamente, uma explosão das imagens, visto que $\lim_{x \to -2} 1 = 1$ e que $\lim_{x \to -2} (x+2)^2 = 0$, em conformidade com o teorema 4.6. Simbolicamente, é usual representar esse fato

pela **igualdade simbólica** $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{0} = \infty$". Rigorosamente falando, esta igualdade não faz sentido (pois jamais divisão por 0 tem algum significado). No entanto, serve como recurso didático para entender que ocorre um limite infinito (a "explosão"). Além disso, cabe destacar que o símbolo ∞, quando utilizado sem sinal, significa que, a princípio, não se sabe se a tendência é para $+\infty$ ou para $-\infty$. É mais comum, porém, o símbolo ∞ indicar que é indiferente se ocorre $+\infty$ ou $-\infty$, pelo menos num primeiro momento.

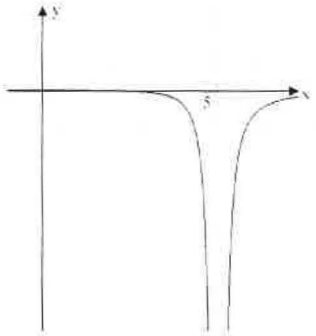
Para determinar que divergência ocorre de fato, deve-se **estudar o sinal da função** $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$, em vizinhanças ("minúsculas") de -2. Já que, $\forall\, x \in R - \{-2\}$, tem-se $(x+2)^2 > 0$, tem-se que $f(x) > 0$ em qualquer vizinhança de -2. Assim, pelo teorema 1.4.6, $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} = +\infty$. Graficamente, ocorre o que se costuma denominar **assíntota vertical**, em $x = -2$. Intuitivamente, a ideia é que, caso um ponto se desloque continuamente sobre o gráfico de f num mesmo sentido, a distância entre o ponto e a reta $x = -2$ tende a zero, conforme $x \to -2$.



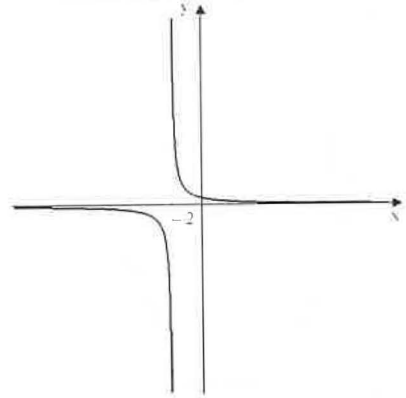
l) Seja $f(x) = \frac{2-x}{(5-x)^2}$. Quando $x \to 5$, ocorre a igualdade simbólica $\lim_{x \to 5} \frac{2-x}{(5-x)^2}$ "$= \frac{-3}{0} = -\infty$". Portanto, pode-se garantir a ocorrência de uma explosão das imagens, em torno de $x_0 = 5$. Contudo, não se sabe, ainda, se para $+\infty$ ou se para $-\infty$. Assim, o teorema 4.6 pede que se *estude o sinal* do quociente $\frac{2-x}{(5-x)^2}$:



Deste modo, existem vizinhanças (a propósito, nem tão pequenas assim) de 5 nas quais as imagens de f têm, todas, o mesmo sinal: *negativo*. Por conseguinte, pode-se garantir, pelo teorema 1.4.6, que: $\lim_{x\to 5}\frac{2-x}{(5-x)^2}=-\infty$. Novamente, percebe-se graficamente a existência de uma assíntota vertical, agora representada pela reta x = 5.



m) Para determinar o sinal da divergência infinita, **não é suficiente** obter o sinal do real **k** (**não nulo**) na igualdade simbólica "$\frac{k}{0}$" (embora isto funcione nos exemplos anteriores). A divergência para o infinito depende completamente do caráter local da função. É perfeitamente possível que as explosões à esquerda e à direita sejam distintas, apesar de o sinal de **k** estar determinado. Isso ocorre, por exemplo, com $f(x)=\frac{1}{x+2}$. Caso $x<-2, f(x)<0$. Se $x>-2, f(x)>0$. Deve-se, assim, adequar o teorema em 4.6 para justificar as tendências laterais, uma vez que, semivizinhanças à esquerda de – 2 têm sempre imagens negativas por f, ao passo que à direita de – 2, as imagens são positivas em qualquer semivizinhança. Portanto, tem-se que $\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}=-\infty$, $\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2}=+\infty$, enquanto o símbolo $\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}$ não faz sentido, porque as tendências laterais são diferentes. O gráfico de f é exibido a seguir.



1.4.7. Limites No Infinito

Valem as seguintes propriedades básicas de limites (eventualmente, infinitos) no infinito:

IX. $\lim_{x\to\infty} k = k, \forall\, k \in R$;

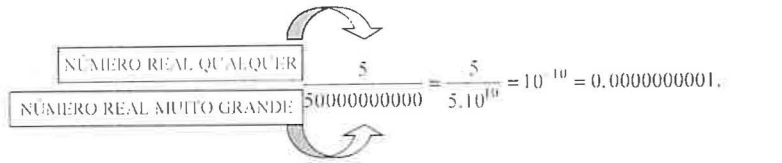
X. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \forall\, n \in N^*$;

XI. $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

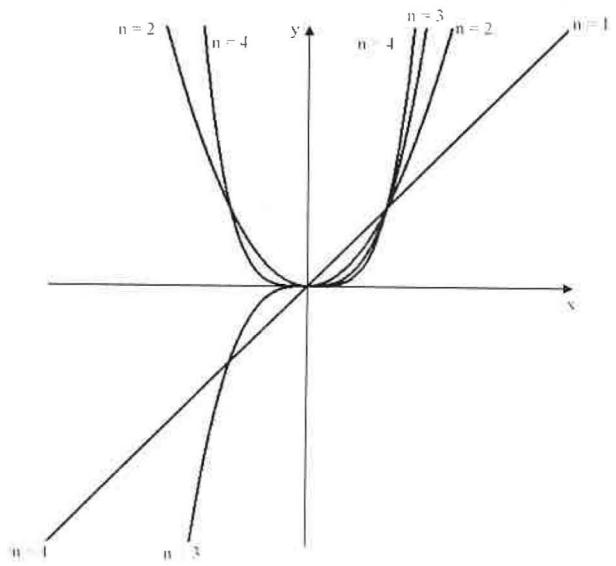
XII. $\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0, \forall\, k \in R$.

Nas propriedades I e IV acima, o símbolo ∞ significa que a propriedade vale, indistintamente, para $+\infty$ e para $-\infty$.

A propriedade I é bastante intuitiva geometricamente. A propriedade IV indica, simbolicamente, que "$\frac{k}{\infty}=0$". Intuitivamente, dividir um número real *qualquer* por um número "muito grande" produz um resultado com módulo "muito pequeno", consoante pode ser visto no exemplo seguinte.



Enfim, as propriedades II e III exibem o comportamento das denominadas *funções potências*, de lei $f(x) = x^n$, em que n é um número inteiro positivo. A seguir, os gráficos de f para alguns valores de n.



Percebe-se que, quando o expoente é par, como a função potência será uma função par, o gráfico será simétrico em relação ao eixo y. Assim, a tendência para $+\infty$ deverá ser idêntica à tendência para $-\infty$. Tendências opostas ocorrem quando n é ímpar. Também é fácil concluir que o sinal da potência x^n será *positivo*, se n for *par*, e *negativo*, quando n for *ímpar*, no caso em que x é um número "muito pequeno" (como $-M = -69^{24!}$). Assim, explicam-se (por indução vulgar, ou seja, de modo intuitivo) as seguintes igualdades simbólicas: $(+\infty)^n = +\infty$, para todo inteiro positivo n, bem como $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se n é par} \\ -\infty, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$.

1.4.8. Mais Propriedades Do Infinito

As seguintes propriedades continuam válidas substituindo-se (simultaneamente, em cada propriedade) a tendência real **a** por $\mathbf{a}^-$, por $\mathbf{a}^+$, por $+\infty$ ou por $-\infty$:

XIII. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \pm\infty$ (os limites devem ser "**iguais**");

XIV. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to a} g(x) = k \ (\in \mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \pm\infty$;

XV. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to a} g(x) = k \ (\in \mathbb{R}^*) \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } k > 0 \\ \mp\infty, & \text{se } k < 0 \end{cases}$;

XVI. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \pm\infty$;

XVII. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \mp\infty$;

XVIII. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

XIX. $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

XX. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$; $0 < b \neq 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } b > 1 \\ 0, & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$;

XXI. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$; $0 < b \neq 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} b^{f(x)} = \begin{cases} 0, & \text{se } b > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$;

XXII. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$; $0 < b \neq 1 \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[\log_b f(x)\right] = \begin{cases} +\infty, & \text{se } b > 1 \\ -\infty, & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$;

XXIII. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$; $0 < b \neq 1$; $\exists V_{\dot{\delta}}(a) : f(x) > 0, \forall x \in V_{\dot{\delta}}(a) \Rightarrow$
$\lim_{x\to a}\left[\log_b f(x)\right] = \begin{cases} -\infty, & \text{se } b > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$.

Embora seja uma lista muito grande de propriedades com limites, todas ensinam a trabalhar com limites infinitos de modo correto. De I a V, têm-se as importantes propriedades operatórias com o infinito, as quais justificam o uso das seguintes igualdades simbólicas:

i. "$(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ (as imagens da soma de duas funções que explodem para cima continuam explodindo para cima)";

ii. "$(-\infty)+(-\infty) = -\infty$" (as imagens da soma de duas funções que explodem para baixo continuam explodindo para baixo)";

iii. "$(\pm\infty)+k=+\infty$" (uma simples translação vertical de uma função que explode não altera a divergência de suas imagens);

iv. "$(\pm\infty)\cdot k=\begin{cases}\pm\infty, & \text{se } k>0\\ \mp\infty, & \text{se } k<0\end{cases}$" (uma simples dilatação ou compressão das imagens de uma função não a impede de continuar explodindo, mas invertendo o sinal da divergência, no caso em que se sucede uma reflexão em relação ao eixo x);

v. "$(\pm\infty)\cdot(+\infty)=\pm\infty$";"$(\pm\infty)\cdot(-\infty)=\mp\infty$";

Deve-se ter muita atenção, contudo, com as apelidadas "operações" envolvendo o infinito. A humanidade demorou muitos milênios para dominar esse conceito. Mesmo depois do nascimento "formal" do Cálculo, foram quase dois séculos para conseguir-se tal façanha. Nem sempre quando se "brinca" com o infinito as operações algébricas usuais continuam válidas. Em alguns casos, faz sentido atribuir algum significado para determinadas operações. Para outras, porém, não há regra geral.

Exemplos:

n) Quando se tem que resolver uma "equação" clássica como $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$, ao fazer $x=\sqrt{1+\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}\right)}=\sqrt{1+x}$, está se supondo que há alguma solução real. Implicitamente, também, está sendo utilizada a ideia da igualdade simbólica "$(+\infty)-1=+\infty$", já que, ao retirar-se do segundo membro um dos infinitos "1", supõe-se que ainda restam infinitos "1", logo em seguida. A partir daí, empregam-se propriedades operatórias análogas às utilizadas no campo real:

$$x=\sqrt{1+x}\Rightarrow x^2=1+x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Uma vez que x é uma raiz quadrada (e, supostamente, real), não há outra opção, senão impor $x>0$. Daí, *caso a equação tenha solução real*, deve ser $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. É possível provar, num contexto muito mais avançado, todavia, que o valor encontrado é, de fato, a única solução da equação dada (porque a sequência numérica ($\sqrt{1}$, $\sqrt{1+\sqrt{1}}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$,...) converge, mas isto é uma outra história).

p) Entretanto, grandes matemáticos, tais como Euler, atacaram erroneamente o infinito. Seja a "soma" $S=1-1+1-1+\ldots$, em que os termos + 1 e − 1 alternam-se "indefinidamente". Caso se tente estender a associatividade da adição a tal expressão, pode-se reescrever S assim: $S=(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+\ldots$, uma

vez que em cada um dos "infinitos" pares de parêntesis, a soma é nula. Daí, S *seria* igual a 0.

Por outro lado, na hipótese de alguém "preferir" que seja válida a distributividade (e suas consequências), poder-se-ia escrever $S=1-(1-1+1-\ldots)=1-S$, o que traria o surpreendente resultado S = 1/2, uma total contradição com o valor "obtido" precedentemente (S = 0). Pior: $S=1-(1-1)+(1-1)+\ldots=1$ (?!). Tudo isto se deve ao fato de pensar que, "no infinito", são válidas todas as propriedades aritméticas usuais, o que deve ser, pelo visto, FALSO. A propósito, diz-se que a "soma" (a rigor, a **série) S diverge**, no sentido de que não existe $\lim_{n\to\infty}\left[1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}\right]$, em que n é o número de termos da soma. Tal limite não se concentra em torno de número algum.

q) Uma consequência fundamental das propriedades acima é o limite de um polinômio no infinito. Conforme a justificativa seguinte, *o limite de um polinômio no infinito é igual ao limite do* ***termo dominante***. Com efeito, supondo todos a_i reais, com $a_n\neq 0$ (e, obviamente, n natural):

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}P(x)=\lim_{x\to\infty}\left[a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}+\ldots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)\right]=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}a_nx^n\right)\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}+\ldots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}a_nx^n.1=\lim_{x\to\infty}a_nx^n$$

, uma vez que, quaisquer que sejam a_i e a_n ($\neq 0$) reais, tem-se que: $\lim_{x\to\infty}\frac{a_i}{a_nx^{n-i}}=0$, $\forall\, i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$. Assim, por exemplo,

$\lim_{x\to+\infty}\left(2-3x+5x^3-4x^6\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^6\right)$"$=(-4)\cdot(+\infty)^6=(-4)\cdot+\infty$" $=-\infty$, bem como:

$\lim_{x\to-\infty}\left(7x^{11}-3x^8+69x^5+24\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(7x^{11}\right)$"$=7\cdot(-\infty)^{11}=7.(-\infty)$" $=-\infty$ e

$\lim_{x\to\infty}\left(2x^{24}-5x^{11}-11\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2x^{24}\right)=+\infty$, em que o símbolo ∞ significa que tanto para $x\to+\infty$, quanto para $x\to-\infty$ o resultado é o mesmo: $+\infty$.

r) Outro resultado muito importante de conhecer é o limite de uma função racional, no infinito. Como corolário do resultado obtido anteriormente, supondo $a_n\cdot b_m\neq 0$, tem-se que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_1x+b_0}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}\,x^{n-m}\right)$$

Aqui, vale a pena comentar três casos possíveis:

r.1) **n < m**. O limite acima fica igual a **zero**, uma vez que m – n fica um natural positivo. Em verdade: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}\cdot x^{n-m}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_mx^{m-n}}\right)=0$.

r.2) **n = m**. O limite anterior é igual ao número real $\frac{a_n}{b_m}$, como é fácil perceber.

r.3) **n > m**. Agora, o limite é ± ∞, dependendo do sinal do quociente $\frac{a_n}{b_m}$ e da paridade de n – m.

Desta forma, tem-se, por exemplo, que:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^7-5x^2+4x-8}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^7}{-x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^5\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^7-5x^2+4x-8}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^7}{-x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^5\right)=-\infty,$$

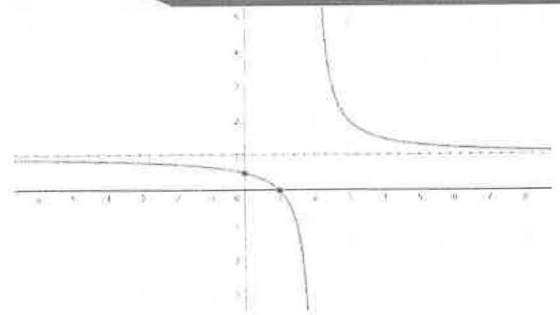
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^{1000}+6x^{200}+\pi x-e}{-x^{1024}+7x^{669}+11x^{224}-2469}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^{1000}}{-x^{1024}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^{24}}=0 \text{ e}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-30x^{17}+x^{11}+5x^6-1}{15x^{17}-\sqrt[5]{9}x^8+\ln 2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-30x^{17}}{15x^{17}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-2\right)=-2.$$

1.4.9. Assíntotas Horizontais

No item anterior foram apresentados exemplos de limites no infinito que dão valores finitos. Isso significa que, quando $\lim_{x\to+\infty}f(x)=k$ (k finito), o traçado do gráfico da função f fica praticamente igual ao gráfico da reta y = k quando x tende a mais infinito. O mesmo ocorre com a tendência a menos infinito.

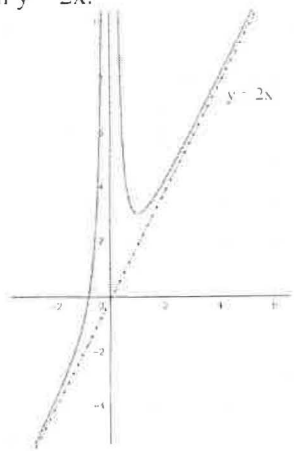
Por exemplo, do fato que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x-2}=1$ conclui-se que o gráfico da função f: IR – {2}→IR, dada por $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$, tende à reta y = 1 quando x tende a mais infinito e também quando x tende a menos infinito, como pode ser confirmado observando o gráfico da função a seguir:



1.4.10. Assíntotas Oblíquas

Considere a função f: IR – {0}→IR dada por $f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2}$. Perceba que f não tem assíntotas horizontais, uma vez que $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+1}{x^2}=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{x^2}=-\infty$. Porém, é possível concluir que f(x) tem uma assíntota vertical em x = 0, desde que $\lim_{x\to0}\frac{2x^3+1}{x^2}=+\infty$ e $\lim_{x\to0}\frac{2x^3+1}{x^2}=-\infty$.

Quando x se distancia da origem, para a esquerda ou direita, tem-se $2x^3 >> 1$ e daí $2x^3 + 1 \cong 2x^3$. Isso faz com que $f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2}\cong\frac{2x^3}{x^2}=2x$, para x longe da origem do plano cartesiano. Deste modo, o traçado do gráfico de f se aproxima do gráfico da função g(x) = 2x quando x se distancia da origem. Isso implica que $f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2}$ em uma assíntota oblíqua em y = 2x.



O método algébrico utilizado anteriormente realmente justifica a existência de uma assíntota oblíqua, porém, nem sempre é prático executá-lo, principalmente quando a função é composta de várias parcelas de categorias diferentes, como polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Vamos desenvolver uma técnica pra verificar, por meio de limite, se uma função admite uma assíntota oblíqua.

Caso o gráfico de uma função f tenha uma assíntota oblíqua então a linha do gráfico de f se aproxima, no infinito, da equação de uma reta da forma $y = ax + b$. Deste modo, é possível afirmar que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$. Até foi possível inserir limite na identificação de uma assíntota oblíqua, mas como verificar se esse limite dá zero e, caso seja igual a zero, como identificar os valores de a e b? Observe o seguinte desenvolvimento:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0$$

Como $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}=0$ então $\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]=0$. Por outro lado, como $\lim_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty$, a única possibilidade de $\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]=0$ é que ocorra $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}-a=0$, ou seja, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.

Caso $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ não seja finito ou seja igual a zero, então f não possui uma assíntota oblíqua.

Já aprendemos a calcular o coeficiente angular da assíntota oblíqua. Mas, como calcular o coeficiente linear? Muito, simples! Depois de determinar o valor de a, basta voltar no limite original $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$ e concluir que ele é equivalente a $b=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$. Pronto, já sabemos como determinar a equação da reta que é uma assíntota oblíqua da função f.

É importante ressaltar que é necessário fazer esse cálculo, separadamente, para $x\to+\infty$ e para $x\to-\infty$, uma vez que a função pode ter assíntotas diferentes em mais infinito e em menos infinito.

Voltemos ao exemplo analisado no início do item, ou seja, $f: \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2}$.

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{1}{x^3}=2$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}2+\frac{1}{x^3}=2$

Assim, f(x) tem uma assíntota oblíqua com coeficiente angular igual a 2.

(3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0$

(4) $\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}-2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0$

Deste modo, a função tem apenas uma assíntota oblíqua, que é a reta $y = 2x$.

Considere agora a função $g: \mathbb{R}'\to\mathbb{R}$ cuja fórmula é $g(x)=x+\sqrt{x}$. Há um detalhe curioso sobre essa função e assíntotas oblíquas. Até é possível calcular, supondo que exista, o valor do coeficiente angular da assíntota oblíqua, a saber:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1$$

Entretanto, o valor de b, coeficiente linear da reta, não existe:

$$b=\lim_{x\to\infty} g(x)-x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Desta forma, a função $g(x)=x+\sqrt{x}$ não possui assíntota oblíqua.

Pra finalizar esse tópico, analisemos agora a função $h: \mathbb{R}'\to\mathbb{R}$ cuja expressão algébrica é $h(x)=\sqrt{x^2+2x}$.

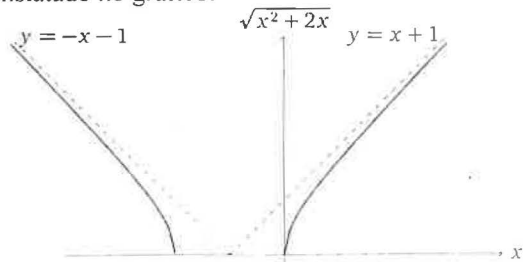
(1) $a_1=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}}=1$

(2) $a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}=-1$

(3) $b_1=\lim_{x\to+\infty} h(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$

(4) $b_2=\lim_{x\to-\infty} h(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=-1$

Logo, h(x) tem duas assíntotas oblíquas, uma pra $x\to+\infty$ e outra pra $x\to-\infty$, como pode ser constatado no gráfico:

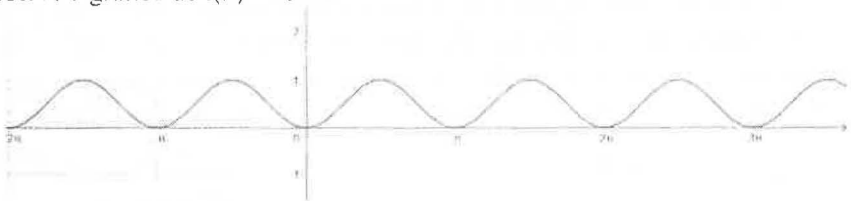


Exercícios Resolvidos

01) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}^2 x$

Solução:

Observe o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$



Note que não é possível precisar o comportamento de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ quando x tende a infinito, uma vez que f(x) não tende a nenhum valor específico.

Assim, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}^2 x$ não existe.

02) Calcule

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Solução:

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\sqrt{\frac{1}{x^8}}}}}{\cancel{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\sqrt{\frac{1}{x^8}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{2n}} = 0$, segue que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\sqrt{\frac{1}{x^8}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ não existe porque a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ não é definida para valores de x negativos.

03) Calcule

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

Solução:

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^x + \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x} =$

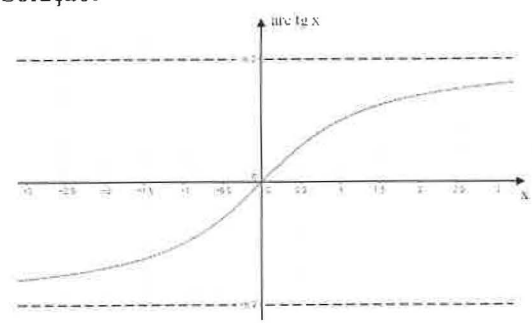
$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x}$

Note que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x} = 0$, fazendo com que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = 1$

b) Perceba que $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$, implicando que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = 0$

04) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x$.

Solução:



Ao lado está representado o gráfico da função $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$. Note que, aumentando os valores de x, o gráfico da função se aproxima de uma assíntota horizontal em $y = \pi/2$.

Assim: $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{2}$

05) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

06) Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{6x+9}-3}{t}$.

Solução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{6x+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{6x+9}-3}{x}\frac{\sqrt{6x+9}+3}{\sqrt{6x+9}+3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+9-9}{x\sqrt{6x+9}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\sqrt{6x+9}+3}=\frac{6}{\sqrt{9}+3}=1$$

07) Calcule $\lim_{x\to -\infty} e^x-e^{2x}$.

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x-e^{2x}=\lim_{x\to+\infty} e^x(1-e^x)$$

Como $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} 1-e^x=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x-e^{2x}=-\infty$

08) (EFOMM-99) Resolvendo $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-4x^2+5}{6x^3+3x-7}$, encontramos

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 2/3 e) 4

Solução: Alternativa D

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-4x^2+5}{6x^3+3x-7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}}{6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=\frac{4-0+0}{6+0-0}=\frac{2}{3}$$

09) (EFOMM-94) O valor de $\lim_{x\to-\infty} e^{(x+\sqrt{x^2-3x})}$ é:

(A) 1 (B) $e^{-1/2}$ (C) $e^{-3/2}$ (D) $e^{1/2}$ (E) $e^{3/2}$

Solução: Alternativa E

Como a função exponencial é contínua $\lim_{x\to-\infty} e^{(x+\sqrt{x^2-3x})}=e^{\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-3x}}$

Como x é negativo:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-3x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-\sqrt{x^2-3x}}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Logo: $\lim_{x\to-\infty} e^{(x+\sqrt{x^2-3x})}=e^{\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-3x}}=e^{\frac{3}{2}}$

10) Calcule o valor de $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$.

Solução:

É possível reescrever a expressão proposta, eliminando a divisão por 0:

$$\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}-1\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{1-\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}}\right)\frac{1+\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}=\frac{1}{t}\left(\frac{1-1-t}{\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}\right)=$$

$$=\frac{-t}{t\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}=\frac{-1}{\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}$$

Portanto: $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)=\lim_{x\to0}\dfrac{-1}{\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}=\dfrac{-1}{1(1+1)}=-\dfrac{1}{2}$

11) Calcule $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$.

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})\frac{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-b)x}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}=$$

$$=\frac{a-b}{1+1}=\frac{a-b}{2}$$

12) (EFOMM-95) O valor de $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}\right)$ é:

(A) $\dfrac{\pi}{12}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$ (E) $\dfrac{3\pi}{4}$

Solução: Alternativa D

Como a função arc tg é contínua: $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{9}{\sqrt{x}}+9\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{\sqrt{3}+0}=\sqrt{3}$$

Portanto: $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}\right)=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$

13) (EN-21) Sejam f e g duas funções reais de modo que, para todo x, $(f(x))^8 + (g(x))^8 = 4$. Assinale a opção que apresenta o valor do limite $\lim_{x\to 0} f(x)\sqrt{x}$.

a) indefinido b) ∞ c) $-\infty$ d) 0 e) 1

Solução: Alternativa D

Se, para todo x real, ocorre $(f(x))^8 + (g(x))^8 = 4$, então f(x) é uma função limitada, ou seja, para todo real $a \in D(f)$ tem-se que $\lim_{x\to a} f(x) = L_a$, onde L_0 é finito.

Assim, $\lim_{x\to 0} f(x)\sqrt{x} = \lim_{x\to 0} f(x).\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = L_0.0 = 0$

14) (IME-70) Determine as assíntotas da curva $y = x + 2 - \frac{3}{x}$.

a) A única assíntota é x = 0 b) x = 0 e y = x – 2
c) x = 0, y = 0 e y = x + 2 d) x = 0 e y = x + 2
e) x = 0 e y = 0 e) nda

Solução: Alternativa D

Verificação de assíntotas horizontais:

$\lim_{x\to+\infty} x+2-\frac{3}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x+2-\frac{3}{x} = -\infty \Rightarrow$ não há assíntotas horizontais

Verificação de assíntotas verticais:

$\lim_{x\to 0^+} x+2-\frac{3}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} x+2-\frac{3}{x} = -\infty \Rightarrow$ há uma assíntota vertical em x = 0

Verificação de assíntotas oblíquas:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2-\frac{3}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2-\frac{3}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2} = 1$$

Para determinar a assíntota oblíqua basta fazer:

$$0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = \lim_{x\to+\infty} x+2-\frac{3}{x}-(ax+b) = \lim_{x\to+\infty}(1-a)x+(2-b)-\frac{3}{x} \Rightarrow$$

a = 1 e b = 2 $\Rightarrow$ assíntota oblíqua é y = x + 2.

15) Sejam a e b números reais tais que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x+b}{x-4} - ax - b\right) = 4$. Então, é correto afirmar que a + b é

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

Solução: Alternativa C

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x+b}{x-4} - ax - b\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x+b-ax^2+(4a-b)x+5b}{x-4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2-a)x^2+(4a-b+3)x+3b}{x-4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2-a)x+4a-b+3+\frac{3b}{x}}{1-\frac{4}{x}}\right) = 4$$

Se $2 - a \neq 0$ então esse limite tenderia pra $+\infty$. Como o limite é finito, então a = 2.

Pro limite dar 4 quando x tende a $+\infty$ deve-se impor que:

$4a - b + 3 = 4 \Rightarrow b = 7$

Desta forma: a + b = 9

16) (IME-66) Calcule: $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+...+n^p}{n^{p+1}}$, sabendo que p + 1 > 0.

Solução:

No volume 3 dessa coleção, capítulo 2 de progressão aritmética, foi demonstrada a fórmula para calcular $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$:

$$S_p = \frac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)\right]$$

Por essa fórmula, é possível deduzir que S_p é um polinômio de grau p + 1 e cujo coeficiente de n^{p+1} é igual a $\frac{1}{p+1}$, ou seja, $S_p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + q(n)$, onde q(n) é um polinômio de grau n.

Logo: $\lim_{n\to\infty}\frac{S_p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{p+1}}{p+1}+q(n)}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p+1}+\frac{q(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$

17) (IME/CG-11) Determine o valor de $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$, com $x\in\mathbb{R}$.

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+0}}+0+\sqrt{\frac{1}{1+0}}}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

18) (IME/CG-88) Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+2\ln\frac{1}{n}}}$, onde ln denota logaritmo neperiano.

Solução:

Se $L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+2\ln\frac{1}{n}}}\Rightarrow$

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2\ln\frac{1}{n}}.\ln\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{1-2\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{\ln n}-2}=\frac{-1}{0-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow L=e^{1/2}$$

1.5. LIMITES DO TIPO $\frac{0}{0}$

No item sobre limites no infinito fomos deparados, diversas vezes, com limites do tipo $\infty-\infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, onde foram apresentadas técnicas necessárias para determinar, quando existem, os valores corretos desses limites. Agora serão estudas situações em de limites de funções racionais, onde tanto numerador quanto denominados tendem a zero. Essas situações não podem ser analisadas usando as técnicas já descritas e representam indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.

Sabe-se que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, entretanto, limites do tipo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, onde $\lim_{x\to a}f(x)=0$ e $\lim_{x\to a}g(x)=0$ podem ser calculados. Por exemplo, apesar de $\lim_{x\to1}x^2-1=0$ e $\lim_{x\to1}x-1=0$, é possível demonstrar que $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

1.5.1. Limites $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}$, onde p(x) e q(x) são polinômios divisíveis por x – a.

Há uma técnica, baseada em divisão polinomial, que permite calcular o limite supra citado. Por exemplo, suponha que se deseja calcular $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$. Verifique que os polinômios $p(x)=x^2-4x+3$ e $q(x)=x^2-1$ se anulam para $x=1$. Assim, se conclui que $x-1$ divide p(x) e q(x). Logo:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

Essa mesma técnica pode ser usada em limites onde o denominador ou o numerador não sejam polinômios, mas que seja possível cancelar a parcela que zera o numerador e o denominador. Por exemplo:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[9]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(\sqrt[9]{x}-1)}(\sqrt[9]{x^2}+\sqrt[9]{x}+1)}{\cancel{\sqrt[9]{x}-1}}=\lim_{x\to1}\sqrt[9]{x^2}+\sqrt[9]{x}+1=3$$

Em determinadas situações também é possível utilizar a técnica de multiplicar numerador e denominador pelo conjugado algébrica do denominador:

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}=\lim_{x\to4}\sqrt{x}+2=2+2=4$$

1.5.2. O limite $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x+\Delta t)^n - x^n}{\Delta t}$

Repare que $\lim_{\Delta t\to 0}(x+\Delta t)^n - x^n = 0$ e $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t = 0$, ou seja, $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x+\Delta t)^n - x^n}{\Delta t}$ é do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos analisar, inicialmente, casos pequenos, para depois generalizar.

Para n = 2:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x+\Delta t)^2 - x^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x^2 + 2x\Delta t + \Delta t^2 - x^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} 2x + \Delta t = 2x$$

Usando a expansão em binômio de Newton, é possível generalizar:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x+\Delta t)^n - x^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta t + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta t^2 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta t^n - x^n}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta t + \ldots + \binom{n}{n}\Delta t^{n-1} = nx^{n-1}$$

1.5.2. O limite $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}$

O limite $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}$ é, provavelmente, o mais famoso limite em que ocorre a indeterminação $\frac{0}{0}$. Vamos calcular valores aproximados de $\frac{\text{sen}x}{x}$ na vizinhança, pela esquerda e direita, de x = 0 pra tentar prever que valor deve dar o limite citado.

x	− 0,2	− 0,1	− 0,05	0,025	0,075	0,125	0,15
sen x	− 0,1986	− 0,9983	− 0,0499	0,2499	0,07493	0,1247	0,1494
$\frac{\text{sen}x}{x}$	0,9933	0,9983	0,9996	0,9999	0,9991	0,9974	0,99925

Pela tabela, é fácil deduzir que a razão $\frac{\text{sen}x}{x}$ tende a 1 quando x tende a zero. O problema é que a tabela acima, apesar de possibilitar a previsão do resultado, não serve como prova matemática! Para fazer a demonstração desse limite é necessário lançar mão de um importante teorema de cálculo:

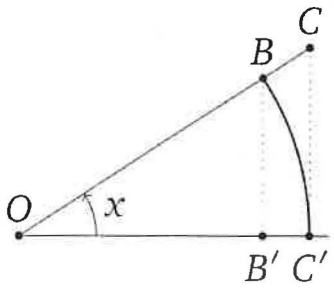
1.5.2.1. Teorema Do Confronto

Sejam f, g e h funções que satisfazem $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para todo x real numa vizinhança do número real a. Se $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Antes de aplicar o teorema do confronto, pra demonstrar o limite trigonométrico fundamental, vamos verificar uma outra aplicação do teorema do confronto. Suponha que se deseja calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}$. Como $-1 \le \cos x \le 1$, segue que, para todo x > 0 (que é o caso de $x \to +\infty$): $-\frac{1}{x} \le \cos x \le \frac{1}{x}$.

Desde que $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, então, pelo teorema do confronto, se pode concluir que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$.

Vamos agora voltar ao objetivo desde tópico, que é calcular o valor do limite trigonométrico fundamental: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}$.



Considere o ângulo x = ∠COC' e trace sobre ele o arco de circunferência C'B, de raio unitário. B' é a projeção de B sobre OC'. Das definições das funções trigonométricas no ciclo trigonométrico sabe-se que BB' = sen x, OB' = cos x e CC' = tg x = $\frac{\text{sen}x}{\cos x}$.

Note que, para qualquer valor de x tal que $0 < x \le \frac{\pi}{2}$:

área de ΔOBB' ≤ área do setor OBC' ≤ área de ΔOCC' ⇒

$$\frac{\text{sen}x.\cos x}{2} \le \frac{x}{2}1^2 \le \frac{1.\frac{\text{sen}x}{\cos x}}{2} \Rightarrow \cos x \le \frac{x}{\text{sen}x} \le \frac{1}{\cos x} \quad \text{elevando a -1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos x} \ge \frac{\text{sen}x}{x} \ge \cos x \Rightarrow \cos x \le \frac{\text{sen}x}{x} \le \frac{1}{\cos x}$$

Nesse momento o leitor deve estar achando que basta aplicar o teorema do confronto e a demonstração está finalizada. Há um grande porém nessa demonstração geométrica, que olhares mais atentos já devem ter reparado: não há como analisar o que ocorre para x negativo na vizinhança de x = 0. Essa demonstração geométrica, usando área, é muito boa, mas permite apenas calcular o limite para $x \to 0^+$.

Como $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$, pelo teorema do confronto tem-se que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$. Desde que $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$ é uma função par, então f(x) = f(– x), e assim é possível afirmar que $\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$.

Como os dois limites laterais são iguais, segue que $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1}$.

Vamos agora aplicar esse resultado no cálculo de outros limites que sejam relacionados com o limite trigonométrico fundamental.

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}.x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}.\lim_{x\to 0^+} x = 1.0 = 0$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}\right)^2.\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1.\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x.\text{sen}2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2.x.\text{sen}x.\cos x}{1-\cos x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2.x.\text{sen}x.\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(2.x.\cancel{\text{sen}x}.\cos x)(1+\cos x)}{\cancel{\text{sen}x}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2.\cos x(1+\cos x)}{\frac{\text{sen}x}{x}} = \frac{2.1.(1+1)}{1} = 4$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x}{\text{sen}4x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cancel{x}}{4\cancel{x}}\frac{\frac{\text{sen}5x}{5x}}{\frac{\text{sen}4x}{4x}} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{4}\frac{\frac{\text{sen}5x}{5x}}{\frac{\text{sen}4x}{4x}}$

Note que se $x \to 0$ então $4x \to 0$ e $5x \to 0$, ou seja: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x}{5x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}4x}{4x} = 1$

Assim: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x}{\text{sen}4x} = \frac{5}{4}\frac{1}{1} = \frac{5}{4}$

1.6. MUDANÇA DE VARIÁVEL

O último exemplo do item anterior foi resolvido adotando que $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x}{5x} = 1$. Está correto, porém é mais elegante e didático fazer isso por meio de uma troca de variáveis. Fazendo y = 5x, tem-se que se $x \to 0$ então $y \to 0$. Portanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x}{5x} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}y}{y} = 1$$

Na prática, a mudança de vaiável transforma o limite original em outro limite, normalmente mais fácil de ser calculado. Por exemplo, no cálculo do limite $\lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}(x+1)}{1-x^2}$ é mais prático fazer a mudança de variável y = x + 1. Preste a atenção que $x \to -1$ equivale a $y \to 0$, transformando o limite original em:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}(x+1)}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}(x+1)}{(x+1)(1-x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}y}{y}\frac{1}{2-y} = 1.\frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

No caso do limite $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$, a determinação do limite fica mais prática se for realizada a mudança de variável $x = y^2$, $y \geq 0$ Perceba que $x \to 1$ equivale a $y \to 1$. Substituindo no limite original:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y^2-y} = \lim_{y\to 1} \frac{\cancel{y-1}}{y\cancel{(y-1)}} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y} = 1$$

Há casos em que uma mudança de variável transforma o limite em outro cujo resultado é conhecido, permitindo escrever a resposta sem nenhum desenvolvimento algébrico mais extenso. Por exemplo, é até possível calcular o limite $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ fatorando a expressão do numerador, porém fazendo a troca de variável y = x – a, onde x→ a equivale a $y \to 0$, obtém-se o limite $\lim_{y\to 0} \frac{(y+a)^n-a^n}{y}$, que foi abordado no item 1.5.2 desse livro, onde foi demonstrado que $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{(x+\Delta t)^n-x^n}{\Delta t} = nx^{n-1}$. Assim, segue diretamente que:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{y\to 0} \frac{(y+a)^n-a^n}{y} = ny^{n-1} = n(x-a)^{n-1}$$

1.6.1. O limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

O limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é mais uma daquelas indeterminações que é necessário analisar com mais calma pra determinar o valor. Fazendo x assumir valores cada vez maiores, tem-se que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ também aumenta, porém vai ficando cada vez mais próximo de um determinado número, como pode ser visto na tabela seguinte.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2,59374...
100	2,70481...
1000	2,71692...
10000	2,71814...

A tabela sugere que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é um número entre 2,7 e 2,8, porém isso não é uma demonstração, é necessário executar alguém cálculos para demonstrar. Inicialmente, vamos demonstrar que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é crescente. Suponha que n e m são dois números inteiros positivos, com n < m. Pelo desenvolvimento em binômio de Newton:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\left(\frac{n(n-1)}{n^2}\right)\frac{1}{2!}+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+\left(\frac{n!}{n^n}\right)\frac{1}{n!} \quad \text{e}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\left(\frac{m(m-1)}{m^2}\right)\frac{1}{2!}+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+\left(\frac{m!}{m^m}\right)\frac{1}{m!}$$

Fora o fato que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tem mais parcelas (todas positivas!) que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, os coeficientes de $\frac{1}{k!}$, $2 \le k \le n$, são maiores em $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ do que em $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. De fato, para m > n:

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{m^k} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) >$$

$$> \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}$$

Agora é necessário provar que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é crescente para todo x racional. Adote que $x=\frac{n}{q}$, onde n é inteiro positivo e q é racional positivo. Assim: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{q}{n}\right)^{\frac{n}{q}}$. Refazendo os cálculos precedentes nos inteiros, é possível provar que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é crescente para todo x racional. Usando a densidade dos racionais nos reais se conclui que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é crescente nos reais.

Agora vamos demonstrar que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é limitado, para todo x real. Para x = n inteiros positivo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\left(\frac{n(n-1)}{n^2}\right)\frac{1}{2!}+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+\left(\frac{n!}{n^n}\right)\frac{1}{n!} \le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

Por indução finita é possível provar que $2^n \le (n+1)!$, implicando que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} \le 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Dos fatos que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é crescente e limitado significa que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ existe e é finito. Ainda não é possível calcular o valor de $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ com as ferramentas apresentadas até então nesse livro. No capítulo de derivadas, mais especificamente no item sobre a regra de L'Hopital, será apresentada de demonstração mais simples, na opinião do autor desse livro, do valor de $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

No momento, vamos admitir que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, onde e é um número irracional aproximadamente igual a 2,71828. O número e foi estudado em 1727 por Euler e é a base do sistema de logaritmos neperianos.

É possível calcular diversos limites a partir do limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, a maioria por meio de mudança de variável. Observe os exemplos abaixo:

a) Para calcular $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, inicialmente se deve fazer a mudança de variável t = – x, onde $t \to +\infty$ implica $y \to -\infty$: $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t$

Fazendo agora $y = t-1$ ($t \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$):

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right) = e.1 = e$$

b) No caso de $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, basta fazer $t=\frac{1}{x}$, onde $x \to 0 \Rightarrow t \to \infty$, obtendo:

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

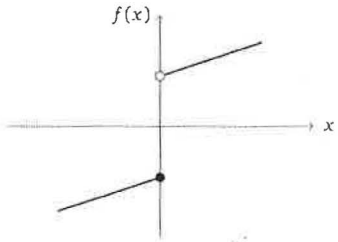
c) O limite $\lim_{x\to0^+}\frac{a^x-1}{x}$ pode parecer, em uma primeira impressão, que não tem relação com o limite exponencial fundamental, porém é possível fazer uma associação usando mudança de variável. Fazendo $z = a^x$, tem-se que se $x \to 0^+$ então $z \to 1^+$ e $\lim_{x\to0^+}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to1^+}\frac{z-1}{\log_a z} = \lim_{z\to1^+}\frac{1}{\frac{\log_a z}{z-1}} = \lim_{z\to1^+}\frac{1}{\log_a z^{\frac{1}{z-1}}}$

Fazendo $t = z-1$, onde $z \to 1^+$ equivale a $t \to 0^+$, segue que:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

1.7. FUNÇÕES CONTÍNUAS

Continuidade é um dos principais conceitos no estudo das funções. Antes de definir continuidade, é importante lançar mão da ideia intuitiva de função contínua. A melhor maneira de fazer isso é apelando para o gráfico da função. Uma função é dita não contínua de seu gráfico dá um salto em determinado número do domínio. Por exemplo, a função cujo gráfico está ilustrado abaixo é não contínua, uma vez que o gráfico de f(x) dá um salto, nesse caso pra cima, em x = 0.



Note que o limite de f(x) quando x tende a zero nem existe, pois os limites a esquerda de zero e a direita de zero nem existem.

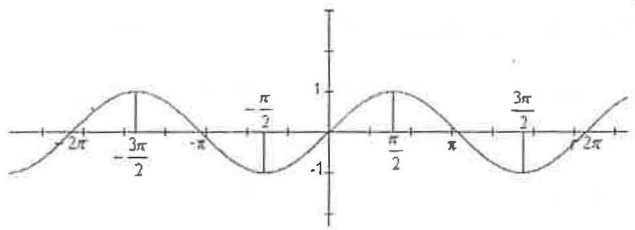
Para que uma função seja classificada como contínua não podem ocorrer saltos como o indicado no gráfico acima. Em outras palavras, numa função contínua uma pequena variação de x implica numa pequena variação de f(x).

Agora já estamos prontos para a definição formal de função contínua:

Definição: Uma função é classificada como contínua em todo seu domínio D(f) se, para todo real $a \in D(f)$, $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

São exemplos de funções contínuas: todas as funções polinomiais (incluindo as funções constantes), a função sen x, a função cos x, a função $\log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), a função a^x ($a > 0$).

Observe, por exemplo, o gráfico da função f(x) = sen x.



Não existe nenhum ponto do gráfico que há um salto. Em todos os números a do domínio de f(x), que é o conjunto dos números reais, ocorre $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Considere os exemplos abaixo, para entender melhor o conceito de continuidade das funções;

a) A função f: IR→IR definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 1, & \text{se } x=0\end{cases}$ não é contínua, pois os limites laterais $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ são distintos, fazendo com que não exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) A função f:IR→IR definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x\neq 1\\ -1, & \text{se } x=1\end{cases}$ é contínua, uma vez que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x-2=-1=f(1)$.

1.7.1. Propriedades Das Funções Contínuas

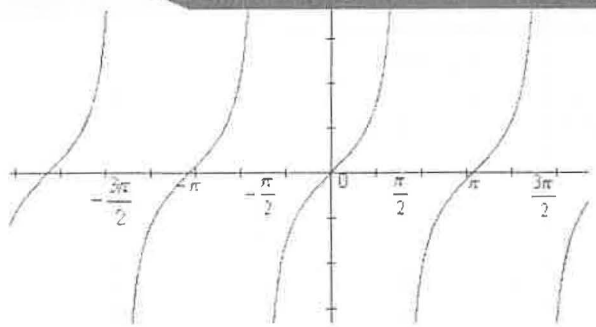
A aplicação de algumas propriedades permite verificar se uma função é ou não contínua sem a necessidade de aplicar a definição. Entre as propriedades de funções contínuas se destacam:

i) Se f e g são funções contínuas, ambas com domínio no conjunto $A \subset IR$, e k é um número real então as funções k.f(x), f(x) + g(x), f(x) – g(x), f(x).g(x), |f(x)| e f(g(x)) são funções contínuas em A;

ii) Se f e g são funções contínuas, ambas com domínio no conjunto $A \subset IR$ e, para todo $x \in A$, tem-se que $g(x) \neq 0$, então $\dfrac{1}{g(x)}$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ são funções contínuas;

iii) Se f:A→B é uma função bijetora contínua então f^{-1}:B→A também é contínua.

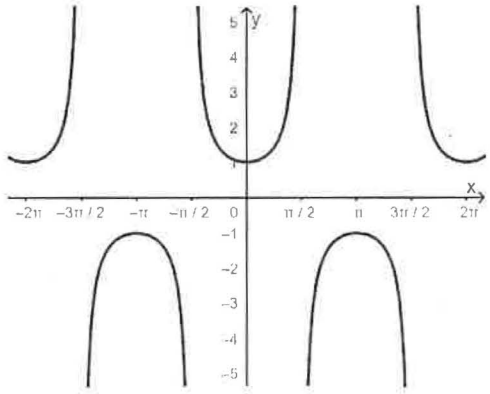
Existe, infelizmente, um macete muito antigo que afirma que uma função é contínua se é possível desenhar seu gráfico numa folha de papel sem tirar a caneta do papel. **Isso não funciona sempre!!!** Gráficos que possuem assíntotas, dependendo como a função tem seu domínio definido, podem ser contínuas. Por exemplo, a aplicação da propriedade (ii) permite concluir que a função f: $IR-\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\to IR$, dada por f(x) = tg x, $k \in \mathbb{Z}$ é uma função contínua. Observe o gráfico da função f(x) = tg x e perceba que não é possível desenhar todo o seu gráfico numa folha de papel sem tirar a caneta da folha.



Entretanto, esse fato não interfere na continuidade de f(x) = tg x, pois o domínio f(x) exclui os arcos onde não é possível calcular a tangente. Assim, para todos os elementos a do domínio de f(x) ocorre que $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, caracterizando f(x) como uma função contínua.

Note que o fato de $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)$ não existir (os limites laterais são distintos, pra $x\to\dfrac{\pi}{2}^-$ vale $+\infty$ e pra $x\to\dfrac{\pi}{2}^+$ vale $-\infty$) não interfere da continuidade da função, pois $\dfrac{\pi}{2}$ e todos os arcos da forma $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ não pertencem ao domínio de f(x).

O mesmo ocorre pra função f: $IR-\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\to(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ dada por f(x) = sec x, cujo gráfico está representado abaixo.

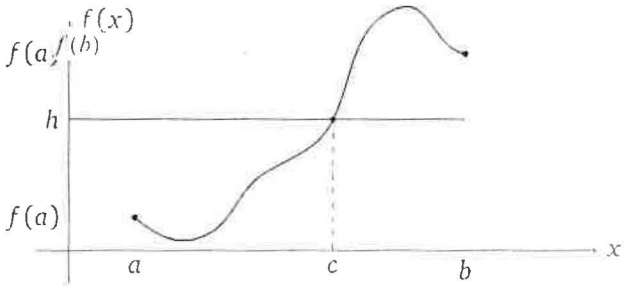


Repare que os pontos que poderiam gerar problema na continuidade da função estão eliminados do domínio de f(x), implicando que, para todos os elementos a do domínio de f(x), ocorre $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e assim f(x) = sec x é contínua.

1.7.2. Teorema Do Valor Intermediário

Teorema: Se f:[a, b]→IR é uma função contínua tal que f(a) < f(b), para todo h∈[f(a), f(b)] existe c∈[a, b] tal que f(c) = h. O mesmo resultado é obtido se f(a) > f(b), bastando considerar o intervalo [f(b), f(a)].

Geometricamente falando, o teorema do valor intermediário pode ser visualizado no gráfico abaixo.



Como a função é contínua, fazendo x variar desde a até b, toda reta horizontal da forma y = h, com f(a) ≤ h ≤ f(b), corta o gráfico de f(x) pelo menos uma vez. A interseção de uma reta horizontal com o gráfico de f(x) garante que existe c, a ≤ c ≤ b, tal que f(c) = h, para todo h∈[f(a), f(b)].

O teorema de Bolzano, apresentado nessa coleção no volume 4, capítulo de Equações Algébricas, é uma aplicação do teorema do valor intermediário, para o caso específico de funções polinomiais.

Teorema de Bolzano: "Sejam P(x) = 0 uma equação polinomial com coeficientes reais e]*a*, *b*[um intervalo real aberto.
1) Se P(*a*) e P(*b*) têm o mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existe raízes da equação em]*a*, *b*[.
2) Se P(*a*) e P(*b*) têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em]*a*, *b*[."

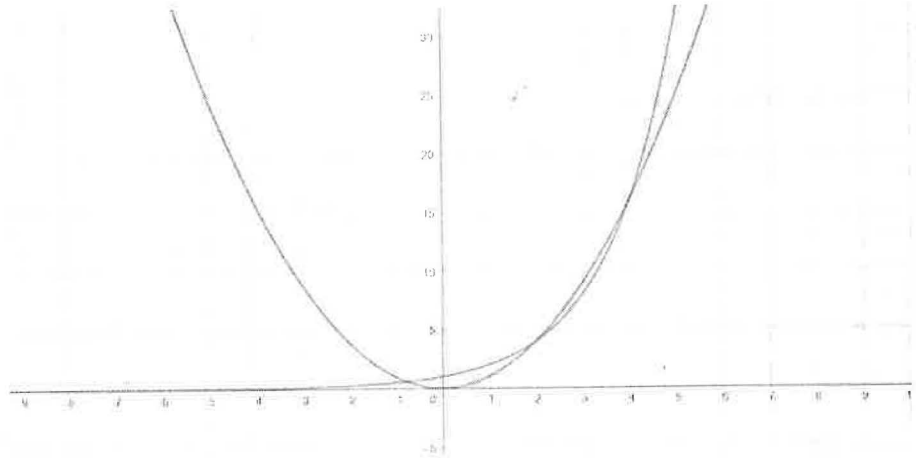
De fato, todo polinômio é uma função contínua, que faz com que P(x) assuma todos os valores no intervalo]P(a), P(b)[quando x varia no intervalo]a, b[, supondo P(a) > P(b). Se P(a) < P(b) basta considerar o intervalo]P(b), P(a)[.

O teorema do valor intermediário pode ser utilizado, por exemplo, pra demonstrar que existe uma raiz da equação $2^x = x^2$ no intervalo (– 1, 0). Sabe-se que x = 2 e x = 4 são raízes da equação $2^x = x^2$, porém não são as únicas. Considere a função f: IR→IR dada por $f(x) = 2^x - x^2$. Sabe-se, propriedade (i) das funções contínuas, que se duas funções são contínuas então sua subtração também é contínua.

Ora, $g(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$ são funções contínuas, que justifica o fato que $f(x) = 2^x - x^2$ também ser contínua, permitindo a aplicação do teorema do valor intermediário.

Note que $f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = -\frac{1}{2}$ e que $f(0) = 2^0 - 0^2 = 1$. Como f(x) é contínua, segue que f(x) assume todos os valores reais pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, fazendo x variar desde – 1 até 0. Portanto, é possível afirmar que existe x∈[– 1, 0] tal que f(x) = 0, implicando que $2^x = x^2$ para algum x∈[– 1, 0].

A seguir estão representados, no mesmo sistema de eixos cartesianos, os gráficos de $g(x) = 2^x$ e $h(x) = x^2$, onde ficam evidenciadas as interseções de seus gráficos, justificando a existência de três raízes da equação $2^x = x^2$: x = 2, x = 4 e um x entre – 1 e 0 (que vale aproximadamente – 0,7666).



Exercícios Resolvidos

01) Se n é um inteiro positivo e $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, calcule o valor de $\lim_{x\to a} \frac{(\operatorname{sen} f(x))^{n+1}}{(f(x))^n}$.

Solução:

Fazendo f(x) = y, se $x \to a$ então $y \to 0$.

Fazendo a mudança de variável no limite a set calculado:

$$\lim_{x\to a} \frac{(\operatorname{sen} f(x))^{n+1}}{(f(x))^n} = \lim_{y\to 0} \frac{(\operatorname{sen} y)^{n+1}}{(y)^n} = \lim_{y\to 0} y\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^n = \lim_{y\to 0} y.\lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^n = 0.1 = 0$$

02) (EFOMM-94) Calculando o limite, $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} 2x + x \operatorname{cossec} 2x)$ encontramos:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) zero (D) $+\infty$ (E) não existe

Solução: Alternativa A

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} 2x + x \operatorname{cossec} 2x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{tg} 2x + \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} 2x} = 0 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{2}$$

03) (EFOMM-97) Dada a função $f(p) = e^{\frac{2p}{\sqrt{1+p}}}$, podemos afirmar que $\lim_{p\to 0} f(p)$ é igual a:

a) e^e b) $(\sqrt{e})^e$ c) $e^{\sqrt{e}}$ d) $(\sqrt[3]{e})^e$ e) $e^{\sqrt[3]{e}}$

Solução: Alternativa C

Como a função exponencial é contínua:

$$\lim_{p\to 0} e^{\frac{2p}{\sqrt{1+p}}} = e^{\lim_{p\to 0}\frac{2p}{\sqrt{1+p}}} = e^{\lim_{p\to 0}\sqrt{(1+p)^{1-p}}} = e^{\sqrt{\lim_{p\to 0}(1+p)^{1-p}}} = e^{\sqrt{e}}$$

04) (IME-71) Assinale abaixo o valor da expressão $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}$.

a) e^{10} b) $e^{2/5}$ c) $e^{5/2}$ d) 1 e) $e^{1/10}$ f) nra

Solução: Alternativa A

Fazendo $y = \frac{x}{2}$, segue que $x \to \infty$ se e somente se $y \to \infty$

Substituindo no limite original:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{10y} = \left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{10} = e^{10}$$

05) (EFOMM-98) Sendo $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2\operatorname{sen}(2x)}}{x}$ é igual a:

a) $\sqrt[3]{2}$ b) e c) $\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $3e^2$

Solução: Alternativa A

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2\operatorname{sen}(2x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2\operatorname{sen}(2x)}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}$$

Fazendo y = 2x, se $x \to 0$ então $y \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}} = \lim_{y\to 0}\sqrt[3]{\frac{2\operatorname{sen} y}{y}} = \sqrt[3]{2}\lim_{y\to 0}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \sqrt[3]{2}$$

06) Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$.

Solução:

Fazendo y = x – 1 segue que $y \to +\infty$ se $x \to +\infty$.

Logo: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+2}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y+2}$

Fazendo $z = \frac{y}{2}$ tem-se que $z \to +\infty$ desde que $y \to +\infty$

Logo: $\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y+2} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{2z+2} = \lim_{z\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^2\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 = e^2.1 = e^2$

07) Calcule $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$.

Solução:

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2.\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}.\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}$$

Fazendo $y = \frac{x-a}{2}$, tem-se que $y \to 0$ quando $x \to a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos(y+a) = 1.\cos 2a = \cos 2a$$

08) Calcule o valor do limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}$.

Solução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}}=\frac{1-2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{2x}}{1+3.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$$

09) Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Solução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2\frac{1}{(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=1.\frac{1}{(1+1).(1+1)}=\frac{1}{4}$$

10) Calcule o valor $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Solução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}-\frac{e^{bx}-1}{x}\right)$$

No tópico, desse capítulo, do limite exponencial fundamental foi demonstrado que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. Assim, é possível afirmar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}-\frac{e^{bx}-1}{x}\right)=\ln e^a-\ln e^b=\ln\frac{e^a}{e^b}=\ln e^{a-b}=a-b$$

11) (EN-98) O valor de "a" para que a função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{se } x\neq 3\\ a & \text{se } x=3\end{cases}$ seja contínua em x = 3 é:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}/3$ c) 1/3 d) $\sqrt{3}/6$ e) 1/6

Solução: Alternativa D

Pata que f seja contínua o limite de f quando x tende a 3 deve ser igual a f(3):

$$a=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

12) (EN-17) Considere a o menor arco no sentido trigonométrico positivo, para o qual a função real f, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}x\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}2x}, & \text{se } x\neq 0\\ \cos a, & \text{se } x=0\end{cases}$ seja contínua em x = 0. Sendo assim, pode-se dizer que a vale:

a) 3π/4 b) π/12 c) 5π/4 d) π/8 e) π/4

Solução: Alternativa E

Para que f seja contínua:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}x}}{\cos x}\sqrt{1+\cos x}}{2.\cancel{\operatorname{sen}x}.\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{2\cos x}\Rightarrow$$

$$\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a_{min}=\frac{\pi}{4}$$

13) (EFOMM-99) Sendo $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x.\operatorname{sen}6x}}{\operatorname{cossec}6x.(1-\cos^2 6x)}$ e $B=\lim\limits_{x\to\log_2 3}2^{2x+1}$, $\dfrac{A^2B}{2}$ vale:

a) $2\sqrt{3}$ b) 6 c) 12 d) $6\sqrt{3}$ e) 18

Solução: Não há alternativa correta

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x.\operatorname{sen}6x}}{\operatorname{cossec}6x.(1-\cos^2 6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}6x\sqrt{x.\operatorname{sen}6x}}{\operatorname{sen}^2 6x}=\lim_{x\to 0}2\sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}=2$$

$$B=\lim_{x\to\log_2 3}2^{2x+1}=2^{2\log_2 3+1}=2^{\log_2 9+\log_2 2}=2^{\log_2 18}=18$$

Portanto: $\dfrac{A^2B}{2}=\dfrac{2^2.18}{2}=36$

14) (IME-70) $C=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)$. Calcule C.

a) 0 b) 1 c) ∞ d) π e) e f) nda

Solução: Alternativa A

$$C = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = 0$$

15) (EFOMM-96) O valor do $\lim_{x\to 0}\left[\frac{3(\cos^2 t - 1)\cdot\sqrt{t\cdot \operatorname{tg} t}}{5t\cdot\sqrt{t^2 - t^2\cdot\cos t}}\right]$ é:

(A) $-3\sqrt{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

Solução: Alternativa D

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3(\cos^2 t - 1)\cdot\sqrt{t\cdot \operatorname{tg} t}}{5t\cdot\sqrt{t^2 - t^2\cdot\cos t}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-3\operatorname{sen}^2 t\cdot\sqrt{t\cdot\operatorname{sen} t}}{5t^2\sqrt{\cos t(1-\cos t)}}\right] =$$

$$= -\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2\frac{\sqrt{t\cdot\operatorname{sen} t}}{\sqrt{\cos t(1-\cos t)}}\frac{\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}\right] = -\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2\frac{\sqrt{t\cdot\operatorname{sen} t(1+\cos t)}}{\sqrt{\cos t(1-\cos^2 t)}}\right] =$$

$$= -\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2\frac{\sqrt{t\cdot\operatorname{sen} t(1+\cos t)}}{\sqrt{\cos t.\operatorname{sen}^2 t}}\right] = -\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2\sqrt{\frac{t}{\operatorname{sen} t}}\frac{\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{\cos t}}\right] =$$

$$= -\frac{3}{5}.1^2.\sqrt{1}.\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1}} = -\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

16) Calcule $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$

Solução:

Fazendo $\frac{1}{n} = x$ segue que $x \to 0$ quando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

17) Prove que existe x tal que $x = \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$.

Solução:

Considere a função $f(x) = x - \cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x$.

i) $f(0) = 0 - \cos^3 0 - \operatorname{sen}^3 0 = -1 < 0$

ii) $f(\pi/2) = \pi/2 - \cos^3(\pi/2) - \operatorname{sen}^3(\pi/2) = \pi/2 - 1 > 0$

Como f é contínua, pelo teorema do valor intermediário existe um número real $a \in (0, \pi/2)$ tal que $f(a) = 0 \Rightarrow$ existe a tal que $a = \cos^3 a + \operatorname{sen}^3 a$.

18) (IME/CG-12) Determine os valores de a e b, constantes reais, para os quais a função f, definida a seguir, seja contínua em x = 0.

$$f(x) = \begin{cases} (1+|\operatorname{sen} x|)^{\frac{a}{|\operatorname{sen} x|}}, & -\frac{\pi}{6} < x < 0 \\ b, & x = 0 \\ e^{\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}}, & 0 < x < \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Solução:

Para que a função seja contínua, deve-se ter $f(0) = b = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Da forma como a função foi definida, devem ser calculados os limites laterais quando x tende a zero e estes devem ser iguais a f(0) = b.

Assim: $b = \lim_{x\to 0^-}(1+|\operatorname{sen} x|)^{\frac{a}{|\operatorname{sen} x|}}$

Do limite fundamental trigonométrico: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, conclui-se que $\operatorname{sen} x \to x$ quando $x \to 0$, que é o caso analisado.

Logo: $b = \lim_{x\to 0^-}(1+|\operatorname{sen} x|)^{\frac{a}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^-}\left((1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right)^a = e^a$

Analisando agora $x \to 0^+$, deve-se ter $b = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}}$.

Devido à continuidade da função exponencial:

$$b = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{2\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\frac{\cos 3x}{\cos 2x}}{3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}} = e^{\frac{2}{3}}$$

Deste modo: $b = e^{\frac{2}{3}} = e^a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

Exercícios Propostos

01) O valor de $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+7}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}$ é

a) 0 b) – 1 c) – 2 d) – 4 e) $-\infty$

02) O valor de $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ é

a) $-\infty$ b) -1 c) 0 d) 1 e) $+\infty$

03) (UESPI-12) Qual o valor do limite $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{\sqrt{x+16}-4}$?

a) 0 b) 1/5 c) 2/5 d) 3/5 e) 4/5

04) O valor de $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+72}-9}{x-3}$ é

a) 3 b) 1 c) 2/3 d) 1/3 e) 0

05) $\lim_{x\to1}\frac{2}{1-x^3}$

a) vale 0 b) vale 2 c) tende pra $+\infty$
d) tende pra $-\infty$ e) não existe

06) (UESPI-04) Qual o valor do limite $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$?

a) – 1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

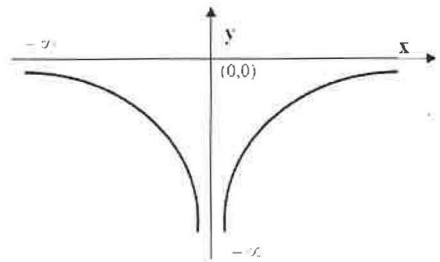
07) (EN-86) $\lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2-1}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) -1 d) ∞ e) - ∞

08) (UESPI-09) Qual o valor do limite $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 12/5 e) 3

09) (EFOMM-96) Sendo $y=f(x)$ uma função representada pelo gráfico abaixo, assinale a alternativa falsa



(A) $\lim_{x\to0^-}f(x)=0$ (B) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ (C) $\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$

(D) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (E) $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$

10) (EFOMM-00) Das afirmativas abaixo:

I . Se $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)=+\infty$

II . Se $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)=+\infty$

III . Se $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)=+\infty$

IV . Se $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

Estão incorretas:

(A) II e IV (B) I e IV (C) III e IV
(D) apenas a II (E) II e III

11) (UESPI-10) Qual o valor do seguinte limite $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+8x}-1}{x}$?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

12) (EN-88) $\lim_{x\to\infty}|\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+1}|=$

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) ∞

13) (EN-90) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}\right]$ é igual a:

a) 0 b) 1/3 c) ½ d) 2/3 e) ∞

14) (IME-69) Calcular $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\pi}{x-\pi}$.

15) (EN-92) O valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^5 + 2x^2 - 3}$ é:

a) 2/3 b) 4/5 c) 1 d) 3/2 e) 2

16) (EN-94) Os números de assíntotas horizontais distintas e verticais distintas da curva $y = \frac{3x}{x^2 - 2}$ são, respectivamente, iguais a:

(A) 0 e 2 (B) 1 e 1 (C) 1 e 2 (D) 2 e 1 (E) 2 e 2

17) (EFOMM-00) O valor de $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt[3]{3x - 5} - 1}$ é:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18) (EFOMM-00) O valor de $\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) 2

19) (EFOMM-02) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}}{x}$

a) $-\infty$ b) 0 c) 1 d) 2 e) $+\infty$

20) (EFOMM-03) Calcule $\lim_{x \to +\infty} [\log(x + 1) - \log x]$

a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) -1 e) $-\infty$

21) O valor de $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4} \right)$ é

a) 1/8 b) 1/6 c) 1/4 d) 1/3 e) 1/2

22) (EFOMM-04) Determine $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{2x + 6} - 2}{x - 1}$

a) 1/6 b) 1/3 c) 1/2 d) 1 e) e

23) (EFOMM-05) O valor do limite $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ é

a) $-1/4$ b) $-1/2$ c) 0 d) 1/4 e) 1/2

24) (EFOMM-04) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{2x^6 - 3}{x^3 + 2x}}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $\sqrt{3}$ d) 0 e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

25) (EFOMM-05) O valor do limite $\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x^2 - 4}$ é

a) $-1/8$ b) $-1/16$ c) 0 d) 1/16 e) 1/8

26) (EFOMM-10) Analise as afirmativas abaixo.

I – Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}$, logo $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

II – N função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1 \\ -1, & \text{se } x = 1 \\ 3 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, tem-se que $\lim_{x \to 1} f(x) = -3$.

III – Sejam f e g funções quaisquer, pode-se afirmar que $\lim_{x \to a} (f.g)^n(x) = (LM)^n$, $n \in \mathbb{N}$, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

Assinale a opção correta:

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira
(B) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras
(C) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras
(D) Apenas a afirmativa III é verdadeira
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras

27) (EFOMM-12) O valor de $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + a} - \sqrt{a}}{x} \right)$ é

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{a}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ d) $2\sqrt{a}$ e) 0

28) (EFOMM-13) O valor de $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right)$ é

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

29) (EN-15) A função real de variável real $f(x)=\frac{2x-a}{bx^2+cx+2}$, onde a , b e c são constantes reais, possui as seguintes propriedades:
I) o gráfico de f passa pelo ponto (1, 0) e
II) a reta y = 1 é um assíntota para o gráfico de f .
O valor de a + b + c é
(A) – 2 (B) – 1 (C) 4 (D) 3 (E) 2

30) (EFOMM-13) O gráfico de $f(x) = (x-3)^2.e^x$, $x\in IR$, tem uma assíntota horizontal r. Se o gráfico de f intercepta r no ponto P = (a, b), então $a^2 + b.c^{sen^2 a} - 4a$ é igual a:
a) – 3 b) – 2 c) 3 d) 3 e) 1/2

31) (IME-70) $G = \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$. Calcule G.
a) 0 b) 1 c) ∞ d) 1/3 e) 1/2 f) nda

32) (EFOMM-14) O valor de $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{5+t}-\sqrt[3]{5}}{t}$ é
a) 0 b) 1/10 c) $1/\sqrt[3]{5^2}$ d) $1/3\sqrt[3]{25}$ e) ∞

33) (EN-17) Se $A = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{9}}{x}$ e $A = \lim_{x\to 0}\frac{|x^2-2|-|x-2|}{x}$ e $C = \lim_{x\to 1}(x-1)^9.\text{sen}\frac{1}{(x-1)^3}$, então o valor de $A^{3B} - C$ é
a) $\frac{8}{3^4}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{3^4}}-\frac{1}{3}$ c) $\frac{6^4}{3^8}$ d) $\frac{6^4}{3^8}-1$ e) $\frac{8}{3^4}-\frac{1}{3}$

34) (EN-18) Sejam g e f funções reais, determine a área da região limitada pelo eixo y, por g(x) = – |x – 3| + 4 e pela assíntota de $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}$ e assinale a opção correta
a) 13/4 b) 40/9 c) 7 d) 81/16 e) 9

35) (EN-19) Determine o valor do limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt[3]{1-x^3})}{2}$ e assinale a opção correta.
a) – ∞ b) + ∞ c) 1 d) 0.5 e) zero

36) (EN-20) Seja f uma função real. Supondo que $\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = M$, calcule $\lim_{p\to 0}\frac{f(b+p)-f(b-p)}{p}$ e assinale a opção correta
a) M b) – M c) 2M d) – 2M e) 0

37) (EN-21) O valor de $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+9+\cos x}{x^2+x+9}$ é
a) 0 b) 5/9 c) 1 d) 3 e) – ∞

38) (EFOMM-19) Determine o valor do seguinte limite $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$.
a) 1 b) + ∞ c) – ∞ d) 0,5 e) zero

39) (EFOMM-20) Sejam os números reais a e b tais que $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x}=\frac{7}{12}$. O valor do produto a.b é
a) 52 b) 56 c) 63 d) 70 e) 84

40) (IME-71) Indique abaixo o valor da expressão $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.
a) $1/\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 1/2 e) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ f) nra

41) (EFOMM-21) O valor do limite $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}+2\cos(3x))$ é dado por
a) – 2 b) 0 c) 2 d) ∞ e) $\nexists$

42) (EFOMM-23) Assinale a alternativa que contém o valor do limite abaixo
$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$$
a) – 4 b) – 2 c) 0 d) 2 e) 4

43) (IME-65) Calcule $\lim_{x\to 2}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{...}}}}$.

44) (IME-91) Dada a função racional:

$f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ e sabendo que a, b, c, m, n, p $\in$ **Z** e que:

1°) f(2) = 0

2°) Para x = -1 tem-se uma indeterminação do tipo 0/0.

3°) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -6$

4°) x = 1 é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$.

5°) $f(3) = \dfrac{1}{f(4)}$

Determine os coeficientes a, b, c, m, n, p.

45) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(3x)}{2x}$ vale

a) 0 b) 2/3 c) 1 d) 3/2 e) $+\infty$

46) O valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sen(x-1)}{x^2 - 4x + 3}$ é

a) – 1/2 b) – 1/4 c) 0 d) 1/4 e) /12

47) O valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x^2}{sen^2 2x}$ é

a) 1/4 b) 1/3 c) 1/2 d) 1 e) 4

48) Sabendo-se que f:IR→IR é uma função tal que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2 + 2x} = 5$, pode-se afirmar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ vale

a) 2 b) 4 c) 5 d) 8 e) 10

49) O valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} \right)$ é

a) 0 b) 1/2 c) 1/3 d) $-\infty$ e) $+\infty$

50) O valor de $\lim\limits_{x \to 0} (e^{2x} - 3x)^{1/x}$ é

a) e^2 b) e c) 1 d) 1/e e) $1/e^2$

51) (EN-04) O $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$ é igual a

a) 0 b) 1/16 c) 1/12 d) 1/2 e) 1

52) (EFOMM-97) Dadas as afirmações:

I - $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{a.\ln x}{1-x} \right) = a$

II – Se f(x) = 3x – 4 e f(g(x)) = 7x – 1, logo $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$

III – $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\cos x.\operatorname{cossec} x.tg\, x.sen^2 x) = \dfrac{1}{2}$

Podemos afirmar que:

a) todas as verdadeiras; b) todas são falsas;

c) somente I e II são falsas; d) somente II e III são verdadeiras;

e) somente I e III são verdadeiras.

53) (EFOMM-97) Dada a função $f(x) = \begin{cases} 10^x + 5, \text{ se } x \neq \log 2 \\ 2, \text{ se } x = \log 2 \end{cases}$, então, o valor de $\lim\limits_{x \to \log 2} f(x)$ é igual a:

a) 7 b) 2 c) 5.log 2 d) log 2 e) 8

54) Qual o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - sen\, x}{x^3}$.

a) 1 b) – 1/2 c) indeterminado d) 1/2 e) – 1

55) (EFOMM-00) O valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} \right)^x$ é:

(A) e^{-3} (B) e^{-1} (C) e (D) e^2 (E) e^3

56) (EFOMM-01) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{x}$

a) e^5 b) 0 c) e d) 1 e) 5

57) (EFOMM-06) O valor do limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^5 2x}{4x^5}$ é:

a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

58) (EFOMM-07) Analise as afirmativas abaixo:

I. $\lim\limits_{a\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

II. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[x]{\dfrac{k+x}{k-x}}\right)=e^{\frac{2}{k}}$

III. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{tg\,2x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=1$

Assinale a alternativa correta:
a) Apenas a afirmativa III é falsa.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) As afirmativas I e III são verdadeiras.
d) As afirmativas II e III são falsas.
e) As afirmativas I e III são verdadeiras.

59) (EFOMM-11) Analise a função a seguir: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 3p-5, & x=2\end{cases}$. Para que a função seja contínua no ponto x = 2, qual deverá ser o valor de p?
a) 1/2 b) 1 c) 3 d) – 1 e) – 3

60) (EFOMM-15) Sabendo-se que $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$, pode-se afirmar que o ângulo θ, em radianos, tal que tg θ = ln a – 1, pode ser
a) $-\pi/4$ b) $-\pi/2$ c) $3\pi/4$ d) $\pi/4$ e) $\pi/2$

61) Sabendo que b é definido como o limite $\lim\limits_{a\to 0}\left(\dfrac{\text{sen}\,4a+\text{sen}\,2a-\text{sen}\,a}{\text{sen}\,3a+\text{sen}\,2a+5\,\text{sen}\,a}\right)$, o valor de f(b) na função $f(x)=\dfrac{10x+(\sqrt{2})^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$.

a) 7/2 b) 41 c) $10+\sqrt{2}$ d) $\dfrac{10\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

62) (EFOMM-17) Sobre a função $f(x)=\dfrac{1+x}{x^2}$, analise as afirmativas:

I – f(x) é contínua em todo $x\in IR$
II - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
III - $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$
Então, pode-se dizer que
a) todas as afirmativas são verdadeiras.
b) todas as afirmativas são falsas.
c) somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
e) somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

63) (EFOMM-17) Para que a função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x^3-10x^2}{x-2}, & x\neq 2\\ k, & x=2\end{cases}$ seja contínua, para todo valor de x, qual será o valor de k?
a) 2 b) 10 c) 20 d) 40 e) 50

64) (EFOMM-18) Os valores de A, sabendo-se que a função abaixo é contínua para todos os valores de x, são $f(x)=\begin{cases}A^2x-A, & x\geq 3\\ 4, & x<3\end{cases}$.
a) 1 ou – 1/2 b) 1 ou – 2 c) 2 ou 4 d) 2 ou 3/4 e) – 1 ou 4/3

65) (EFOMM-20) Seja f uma função real definida por $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{se } x\leq -2\\ ax+b, & \text{se } -2<x<2\\ 2x-6, & \text{se } 2\leq x\end{cases}$, com a, b ∈ IR. Sabendo que os limites $\lim\limits_{x\to+2} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ existem, assinale a opção que apresenta |a + b|.
a) 1/6 b) 1/5 c) 1/4 d) 1/3 e) 1/2

66) (EFOMM-21) O valor do limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$ é dado por
a) $\ln\dfrac{5}{4}-\ln\dfrac{3}{2}$ b) $\ln\dfrac{5}{3}-\ln 2$ c) $\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{5}{4}$ d) $\dfrac{5}{3}$ e) 1

67) (EFOMM-22) O valor do limite $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{4}{x}}$ é

a) e^{-8} b) e^{-4} c) e^{2} d) e^{4} e) e^{8}

68) (EFOMM-24) Calcule o limite a seguir $\lim_{n\to 0}\frac{e^{n}-1}{n^{3}}$

a) 1 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 0 e) e^{2}

69) (EN-87) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^{2}}$ vale:

a) 4 b) 2 c) 1 d) 1/2 e) 1/4

70) (EN-98) O valor de $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^{2} x}{\operatorname{sen} x^{2}}$ é:

a) –1 b) 0 c) 1 d) 2 e) $+\infty$

71) (EFOMM-99) Sabendo que $y = \lim_{x\to 0} e^{\sqrt[x]{1+2x}}$, o logaritmo de y vale:

a) e^{2} b) $\sqrt{e}$ c) e^{e} d) 2e e) $-3e$

72) (EN-06) Sejam **f** e **g** funções reais de variável real. Se $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x^{2}+15}-8} & \text{se } x\neq 7\\ a & \text{se } x=7\end{cases}$ é contínua em x = 7 e $g(x)=\ln^{2}\left(2x+\frac{6}{7}\right)$, pode-se afirmar que $g'\left(\sqrt{7}a\right)$ vale:

a) 0 b) ln 2 c) 1 d) ln 4 e) 2

73) (EN-07) O valor de $\lim_{x\to 1^{+}}[(\ln x).\ln(x-1)]$ é:

a) $+\infty$ b) e c) 1 d) 0 e) -1

74) (EN-12) Calculando-se $\lim_{x\to 0^{+}}(\cot x)^{\operatorname{sen} x}$, obtém-se

a) ∞ b) 0 c) e d) – 1 e) 1

75) (EN-22) Assinale a opção que apresenta o valor de $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

a) 1 b) e^{-1} c) e d) e^{2} e) 0

76) Seja f: IR→IR uma função tal que $x^{3} \le f(x) \le x^{2}$ para $x < 1$. O resultado de $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ é dado por

a) 0 b) 1 c) e d) $+\infty$ e) $-\infty$

77) (EN-14) Sabendo que a função real $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x<0\\ \dfrac{x^{2}+x-a}{x+2} & \text{se } x\ge 0\end{cases}$ é contínua em x = 0, $x\in$IR, qual é o valor de $\frac{a}{b}$, onde $b=\frac{f^{2}(0)}{4}$?

a) 8 b) 2 c) 1 d) – 1/4 e) – 8

78) (EN-16) Calculando $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\operatorname{sen} x}+\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}^{3} x}\right\}$ encontra-se

a) 7/3 b) 13/6 c) 5/2 d) 13/3 e) 7/6

79) (EN-16) No limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^{2}}$ o valor de a pode ser determinado para que tal limite exista. Nesse caso, o valor do limite é

a) – 1/4 b) 1/4 c) 1/8 d) – 1/8 e) 0

80) (EN-17) Sendo $k=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2}+5x+4}{x^{2}-3x+7}\right)^{x}$, então ln (2k) + log 5 é igual a:

a) $\left(1-\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2+9$ b) $\left(1+\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2+7$ c) $\left(1-\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2-9$

d) $\left(1+\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2+9$ e) $\left(1+\frac{1}{\ln 10}\right)\ln 2-7$

81) (EN-23) Seja f uma função definida no conjunto dos números reais. Supondo que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=L$, é correto afirmar que o valor do $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^{2}-1)}{x-1}$ é igual a

a) – 2L b) – L c) 0 d) L e) 2L

82) (EN-24) Assinale a opção que apresenta o resultado de $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+9}{4x+1}\right)^{4x+4}$.

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) e^{-1} d) $e^{-3/4}$ e) 0

83) Seja $L = \lim_{x\to\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}}$, então

a) $L = 0$ b) $L = 1$ c) $L = e$ d) $L = e^2$ e) $L = \infty$

84) (IME-54) Determinar $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4}\right)^x$.

85) (IME-66) Calcule $\lim_{x\to0}(\cos mx)^{n/x^2}$.

86) (IME-67) Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

87) (IME-69) Determinar os valores de a para que a função

$$f(x) = x^{\frac{a^2-a+4}{3}}\left[(x^2+1)^{1/3} - x^{2/3}\right]$$

tenha limite:
i) Finito.
ii) Nulo.
iii) Infinito.
quando $x \longrightarrow +\infty$.

88) (IME-70) $D = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+2}$. Calcule D.

a) e^2 b) 1 c) e^3 d) 0 e) $e(e-1)$ d) nda

89) (IME-71) Assinale abaixo o valor que deve ser atribuído à função $y = \frac{1}{x}\operatorname{sen}\pi x$ no ponto de abscissa $x = 0$ para tornar a mesma contínua no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
(A) 1 (B) $1/\pi$ (C) π (D) $\pi/2$ (E) 0 (F) NRA

90) (IME-77) Sendo $x \in IR$, calcule: $\lim_{x\to0}\sqrt[x^2]{\cos x}$.

91) (IME-78) Para $t > 0$ e $x \geq 1$, defino a função f_t, real de variável real, como:

$$f_t(x) = x\left[\frac{x^t-(t+1)}{t}\right]$$

Supondo-se que o limite indicado exista, define-se

$$f(x) = \lim_{t\to0} f_t(x),\ x \geq 1.$$

Determine $f(e^2)$, onde e é a base dos logaritimos neperianos.

92) (IME-79) Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

93) (IME-85) Determine o valor de b tal que $\lim_{x\to\infty}\sum_{t=0}^{n}\log_p 5^{t+1} = 4$, onde $p = b^{(t+1)2^t}$

94) Considere a função f: IR→IR dada por $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Usando o teorema do valor intermediário, prove que existe $c \in (0, +\infty)$ tal que $f(c) = \frac{1}{\pi}$.

95) Demonstre, usando o teorema do valor intermediário, que a função f: IR→IR dada por $f(x) = \sqrt{x^3+1} - 2x$ admite uma raiz no intervalo (0, 1).

96) Demonstre que a equação $x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x} = 119$ possui pelo menos uma solução.

97) Mostre que os gráficos de $f(x) = 1$ e $g(x) = x^2 \cdot tg(x)$ têm pelo menos um ponto de interseção com abscissa no intervalo $(-\pi/2, +\pi/2)$.

98) Demonstrar que a equação tg x = x tem uma infinidade de raízes reais.

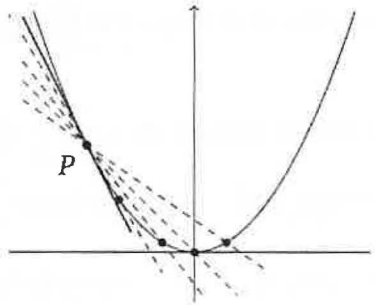
99) Demonstre que a equação $x^2 = \cos x$ possui raízes.

100) Mostre que a equação $\operatorname{sen} x = e^{-x}$ possui uma solução no intervalo (1, 2).

DERIVADA

2.1. INTRODUÇÃO

No século XVII, Fermat estudou o que costumamos chamar de "o problema da tangente". Até então, o conceito de reta tangente à uma curva era a reta que cortava a curva em apenas um ponto. Fermat não estava satisfeito com esse conceito, que falha em diversas situações, e passou a estudar o problema da reta tangente. Para determinar a reta tangente a um gráfico num ponto fixo P, Fermat tomou um outro ponto Q sobre a curva e traçou a reta PQ. Fazendo o ponto Q se aproximar de P, a reta PQ vai se aproximando da reta tangente ao gráfico no ponto P, como indicado na figura abaixo.



Fermat também percebeu que as retas tangentes em pontos de máximo ou mínimo de funções eram horizontais e por isso acreditou que a determinação da reta tangente a um gráfico estava intimamente ligada ao estudo dos máximos e mínimos de uma função.

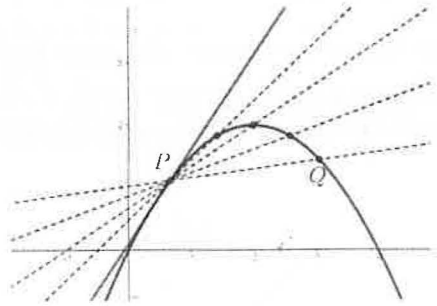
Fermat não tinha, à época, recursos matemáticos pra determinar a equação da reta tangente, mas, intuitivamente, foi o primeiro matemático a perceber a ligação entre máximos/mínimos e reta tangente. Por isso, Fermat é considerado o inventor do cálculo diferencial. Posteriormente, Leibniz algebriza o cálculo infinitesimal, introduzindo a notação dy/dx, como sendo a razão entre a diferença infinitesimal de suas variáveis e criando nomenclaturas que são usadas até hoje.

Isaac Newton também desenvolveu, de forma independente, os conceitos fundamentais do cálculo, inclusive, antes de Leibniz, porém acabou publicando suas descobertas depois das publicações de Leibniz. Alguns resultados dos dois são conceitualmente diferentes, sendo os estudos de Leibniz mais aceitos e adotados em praticamente toda a Europa, com exceção do reino Unido.

2.2. O PROBLEMA DA RETA TANGENTE

Suponha que f(x) é uma função contínua e $P(x_0, f(x_0))$ é um ponto sobre seu gráfico. Adote que $Q(x_1, f(x_1))$ é outro ponto do gráfico de f(x) e que s é a reta passando pelos pontos P e Q. Da geometria analítica sabe-se que a inclinação da reta s é igual a

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$



Fazendo o ponto Q se aproximar, cada vez mais, do ponto P, a reta s se aproxima da reta tangente ao gráfico de f(x) em P. Em outras palavras, fazendo $x_1 \to x_0$ tem-se que $Q \to P$ e s tende à reta tangente ao gráfico de f em P. Utilizando a notação de limite:

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Caso esse limite exista, existe a reta tangente ao gráfico de f em P e sua equação vale $y - y_0 = m(x - x_0)$. Entretanto, como estudado no capítulo anterior, esse limite pode não existir, onde há duas possibilidades:

i) os limites laterais para $x_1 \to x_0^-$ e $x_1 \to x_0^+$ são distintos e aí não existe a reta tangente;

ii) a reta tangente é vertical, não possuindo coeficiente angular.

Por exemplo, considere que se deseja calcula a reta tangente à função $f(x) = x^2$ por ponto (1, 1). A reta tangente à função nesse ponto tem coeficiente angular:

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Portanto, a reta tangente tem equação:

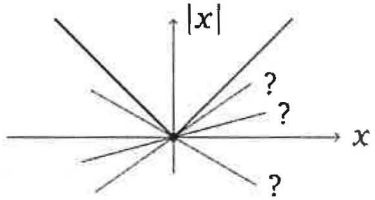
$$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

Há funções que, apesar de serem contínuas, não apresentam reta tangente em determinado ponto de seu gráfico. Um exemplo clássico é a função f: IR→IR dada por f(x) = |x|. Perceba que:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

Como os limites laterais são distintos, não existe $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, implicando que não existe reta tangente ao gráfico de f(x) = |x| em x = 0. De fato, observando o gráfico da função, se verifica que a reta tangente ao gráfico em x = 0 não está bem definida.



2.3. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Definição: Uma função f: A→B é chamada de derivável ou diferenciável num ponto $x_0 \in A$ se existe e é finito o limite

$$f'(x_0)=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Nesse caso, f'(x_0) é denominada de derivada da função f(x) no ponto x_0. Caso o limite acima não exista, se afirma que a função f(x) não é derivável (ou diferenciável) em x_0. Como visto no tópico anterior, f'(x_0) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f(x) no ponto x_0.

A importância da derivada vai muito além de calcular o coeficiente angular de uma reta tangente a um gráfico. A descoberta da derivada permitiu, no passado, a solução de problemas que eram considerados insolúveis por vários matemáticos renomados.

Repare que o limite que define uma derivada leva a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Desta forma, pra calcular a derivada de uma função num ponto é necessário aplicar todo o conhecimento absorvido do capítulo de limites.

Por exemplo, suponha que se deseja calcular a derivada de $f(x) = x^3$ no ponto x = 2. Calculando pelo limite:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=$$

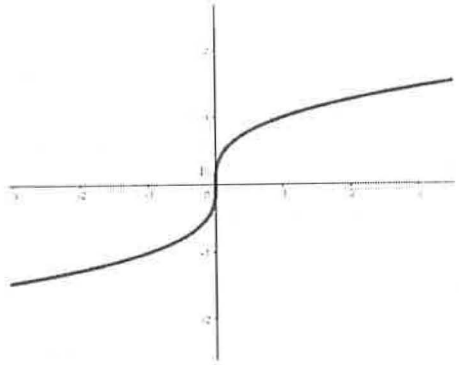
$$=4+4+4=12$$

No item anterior foi apresentado um exemplo em que não existe o limite em determinado ponto da função: f(x) = |x| em x = 0. Nesse caso, se afirmar que a função f não é derivável em x = 0.

No caso de o limite tender pra infinito, afirma-se que a reta tangente é vertical. Isso ocorre, por exemplo, na função f: IR→IR dada por $f(x)=\sqrt[3]{x}$ em x = 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$$

A imagem abaixo representa a reta tangente, que é vertical, ao gráfico de $f(x)=\sqrt[3]{x}$ em x = 0.



Esse procedimento de calcular o limite, quando existe, pra determinar o coeficiente angular da reta tangente pode ser feito pra qualquer função, porém é muito trabalhoso em determinados casos. Assim, é interessante sistematizar esse cálculo, estudando as propriedades do limite $\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, que será feito no próximo item desse capítulo.

2.4. A FUNÇÃO DERIVADA

No tópico anterior já aprendemos como calcular a derivada de uma função f num ponto do seu domínio. Entretanto, em determinadas situações, é necessário calcular o valor das derivadas de uma mesma função em vários pontos do seu domínio e não é nada prático calcular diversos limites semelhantes, alterando apenas a tendência de x. Por exemplo, suponha que desejamos calcular as derivadas de $f(x) = x^5$ nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Utilizando o método ensinado por item anterior, seria necessário calcular os três limites:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x-2}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^5-243}{x-3}.$$

Convenhamos que esse procedimento não é nada prático! Nesse tipo de situação, é útil determinar a expressão geral da derivada da função e substituir nesta os elementos adequados do domínio. Ou seja, é necessário tratar a derivada como uma função. Vamos mostrar como fazer isso num exemplo, determinando a função derivada de $f(x)=\frac{1}{x}$. Pra facilitar o cálculo, será aplicada uma mudança de variável, fazendo $x - x_0 = h$, onde $x \to x_0$ equivale a $h \to 0$. Assim, a expressão geral da derivada de $f(x)=\frac{1}{x}$ é dada por:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-\cancel{h}}{(x+h)x}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}$$

Assim, para um elemento qualquer x_0 do domínio da função $f(x)=\frac{1}{x}$ tem-se que $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. Por exemplo: $f'(1)=-1$, $f'(2)=-\frac{1}{4}$ e $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-9$.

Esse procedimento, que pode ser generalizado para qualquer função derivável, é fundamental pra calcular o valor da derivada em vários elementos do domínio de uma função. Note que esse processo é equivalente a tratar f' como uma função, onde é possível substituir qualquer elemento do domínio na sua fórmula pra determinar a imagem respectiva.

A formalização desse tratamento de f' como uma função está apresentada na definição seguinte.

Definição: Considere uma função f: A→B. A função f', denominada de função derivada de f, é definida como:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

O domínio de f', conjunto onde f' está definida, é subconjunto do domínio de f. Quando uma função f possui derivada em todo os pontos de seu domínio, afirma-se que f é derivável ou diferenciável. Outra notação para f', criada por Leibniz, é $\frac{df}{dx}$. O leitor pode ficar à vontade para decidir qual notação utilizar.

Por exemplo, qual seria a função derivada de $f(x) = x^3$? Vamos determinar usando a definição:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

2.5. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Algumas propriedades facilitam a determinação da função derivada. Essas propriedades recebem o nome de regras de derivação e serão apresentadas nesse tópico. Em todas as regras adote que k é um número real fixo não nulo, n é um inteiro positivo, x é uma variável real, f(x), g(x) e h(x) são funções deriváveis em todo seu domínio.

2.5.1. Se g(x) = k.f(x) então g'(x) = k.f'(x)

Demonstração:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k.f(x+h)-k.f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}k\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k.\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k.f'(x)$$

2.5.2. Se h(x) = f(x) + g(x) então h'(x) = f'(x) + g'(x)

Demonstração:

$$h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

2.5.3. Se $h(x) = f(x).g(x)$ então $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)h(x)-g(x_0)h(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)h(x)-g(x_0)h(x_0)-h(x)g(x_0)+h(x)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{[g(x)-g(x_0)]h(x)+g(x_0)[h(x)-h(x_0)]}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}h(x)+\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}g(x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}h(x)\right]+\lim_{x\to x_0}\left[\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}g(x_0)\right] =$$

$$= h(x_0)\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]+g(x_0)\lim_{x\to x_0}\left[\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right] =$$

$$= h(x_0)g'(x_0)+g(x_0)h'(x_0)$$

Como x_0 pode assumir qualquer valor real (dentro dos domínios de definição das funções f, g e h), segue que $f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$

2.5.4. Se $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ então $f'(x) = \frac{g'(x).h(x)-g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{g(x)}{h(x)}-\frac{g(x_0)}{h(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)h(x_0)-g(x_0)h(x)}{h(x)h(x_0)(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)h(x_0)-g(x_0)h(x)+g(x_0)h(x_0)-g(x_0)h(x_0)}{h(x)h(x_0)(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{[g(x)-g(x_0)]h(x_0)-g(x_0)[h(x)-h(x_0)]}{h(x)h(x_0)(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)h(x_0)(x-x_0)}h(x_0)-\frac{h(x)-h(x_0)}{h(x)h(x_0)(x-x_0)}g(x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)h(x_0)(x-x_0)}h(x_0)\right]-\lim_{x\to x_0}\left[\frac{h(x)-h(x_0)}{h(x)h(x_0)(x-x_0)}g(x_0)\right] =$$

$$= \frac{h(x_0)}{h(x_0)h(x_0)}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]-\frac{g(x_0)}{h(x_0)h(x_0)}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right] =$$

$$= \frac{g'(x_0).h(x_0)-g(x_0).h'(x_0)}{[h(x_0)]^2}$$

Como x_0 pode assumir qualquer valor real (dentro dos domínios de definição das funções f, g e h), segue que $f'(x) = \frac{g'(x).h(x)-g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$

2.5.5. Se $f(x) = h(g(x))$ então $f'(x) = h'(g(x)).g'(x)$.

Demonstração:

Sendo $u = g(x)$, tem-se $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$. Então, Δu depende de Δx e quando $\Delta x \to 0$ tem-se $\Delta u \to 0$.

Assim, $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$ e pode-se escrever:

$$h(g(x)) = h(u) \quad \text{e} \quad h(g(x+\Delta x)) = h(u+\Delta u).$$

Logo, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta x}$. Suponha que $\Delta u \neq 0$. Então:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta x}.\frac{\Delta u}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta u}.\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta u}.\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

Quando $\Delta x \to 0$, tem-se $\Delta u \to 0$:

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = h'(u).g'(x) = h'(g(x)).g'(x)$, o que completa a prova no caso em que $\Delta u \neq 0$.

2.5.6. Se $g(x) = f^{-1}(x)$ então $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Demonstração:

Sabe-se que $f(f^{-1}(x)) = x$.

Além disso, se $h(x) = x$: $h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

Aplicando a regra da derivada da função composta:

$h(x) = f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow h'(x) = f'(f^{-1}(x)).(f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)).g'(x) = 1 \Rightarrow$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

2.6. DERIVADAS DAS PRINCIPAIS FUNÇÕES

2.6.1. Derivada da Função Constante: Se $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$

Demonstração:

Se $f(x) = k$, $k \in IR$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k} = 0$

2.6.2. Derivada da Parcela Polinomial: Se $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - \cancel{x^n}}{h} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right] \Rightarrow$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

2.6.3. Derivada da Função Polinomial:

Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \Rightarrow$

$f'(x) = a_n nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + a_{n-2}(n-2)x^{n-3} + \ldots + 2a_2x + a_1$

Demonstração:

Utilizando a derivada da parcela polinomial e a regra 2 de derivação (a derivada da soma é a soma das derivadas):

$f'(x) = (a_n x^n)' + (a_{n-1}x^{n-1})' + (a_{n-2}x^{n-2})' + \ldots + (a_2x^2)' + (a_1x)' + (a_0)' =$

$= a_n nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + a_{n-2}(n-2)x^{n-3} + \ldots + 2a_2x + a_1$

2.6.4. Derivada da Função $f(x) = \frac{1}{x^n}$: Se $f(x) = \frac{1}{x^n} \Rightarrow f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)^n x^n}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^n x^n}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = -\frac{1}{x^{2n}}(x^n)' = -\frac{1}{x^{2n}}nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Em particular, se $f(x) = \frac{1}{x}$ então $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

2.6.5. Derivada da Função Raiz Enésima: Se $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}$

Demonstração:

Fazendo a mudança de variável: $t = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = t^n \Rightarrow f(x) = f(t^n) = \sqrt[n]{x} = t$

Pela 5ª regra de derivação: $f'(x) = [f(t^n)]' = f'(t^n)(t^n)' = 1.n.t^{n-1} \Rightarrow$

É fato que $g(x) = \sqrt[n]{x}$ é a função inversa de $f(x) = x^n$.

Pela 6ª regra de derivação: $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n.(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}$

2.6.6. Derivada da Função Exponencial Neperiano: Se $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Demonstração:

No capítulo de limites, item 1.6.1, foi demonstrado que $\lim_{x\to 0'} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Fazendo a = e tem-se que $\lim_{x\to 0'} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{k} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{k} = e^x.1 = e^x$$

2.6.7. Derivada da Função Exponencial: Se $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x.\ln a$

Demonstração:

No capítulo de limites, item 1.6.1, foi demonstrado que $\lim_{x\to 0'} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{k} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{k} = a^x \ln a$$

2.6.8. Derivada da Funções Logarítmica Neperiano: Se $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Demonstração:

Note que $g(x) = \ln x$ é a função inversa de $f(x) = e^x$, onde $f'(x) = e^x$

Pela 6ª regra de derivação: $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

2.6.9. Derivada da Função Logarítmica: Se $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.\log_a e$

Demonstração:

Repare que $g(x) = \log_a x$ é a função inversa de $f(x) = a^x$, onde $f'(x) = a^x.\ln a$

Pela 6ª regra de derivação: $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a^{\log_a x}.\ln a} = \frac{1}{x}\log_e a$

2.6.10. Derivada da Função Seno: Se $f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen } x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen } x.\cosh+\text{sen } h.\cos x-\text{sen } x}{h}$$

Para h pequeno, sabe-se que sen h ≈ h e cos h ≈ 1.

Substituindo obtém-se: $f'(x) = \cos x$

2.6.11. Derivada da Função Cosseno: Se $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x.\cosh-\text{sen}x.\text{sen}h-\cos x}{h}$$

Para h pequeno, sabe-se que sen h ≈ h e cos h ≈ 1.

Substituindo obtém-se: $f'(x) = -\text{sen } x$

2.6.12. Derivada da Função Tangente: Se $f(x) = \text{tg } x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

Demonstração:

Lembrando que $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, pela regra da derivada da razão de duas funções:

$$f'(x) = (\text{tg } x)' = \frac{(\text{sen } x)'.\cos x - \text{sen } x.(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

2.6.13. Derivada da Função Cotangente: Se $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\text{cossec}^2 x$

Demonstração:

Lembrando que $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$, pela regra da derivada da razão de duas funções:

$$f'(x) = (\cot x)' = \frac{(\cos x)'.\text{sen } x - \cos x.(\text{sen } x)'}{(\text{sen } x)^2} = \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -\text{cossec}^2 x$$

2.6.14. Derivada da Função Secante: Se $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x.\text{tg } x$

Demonstração:

$$f'(x) = (\sec x)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{(1)'.\cos x - 1.(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \sec x.\text{tg } x$$

2.6.15. Derivada da Função Cossecante:

Se $f(x) = \text{cossec } x \Rightarrow f'(x) = -\text{cossec } x.\cot x$

Demonstração:

$$f'(x) = (\text{cossec } x)' = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{(1)'.\text{sen } x - 1.(\text{sen } x)'}{(\text{sen } x)^2} = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} = -\text{cossec } x.\cot x$$

2.6.16. Derivada da Função Arco Seno: Se $f(x) = \text{arc sen } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Demonstração:

Note que $f(x) = \text{arc sen } x$ é a função inversa de $g(x) = \text{sen } x$, onde $g'(x) = \cos x$

Pela 6ª regra de derivação: $f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.6.17. Derivada da Função Arco Cosseno: Se $f(x) = \text{arc cos } x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Demonstração:

Se sabe que $f(x) = \text{arc cos } x$ é a função inversa de $g(x) = \cos x$, onde $g'(x) = -\text{sen } x$

Pela 6ª regra de derivação: $f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\text{sen}(\text{arccos } x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.6.18. Derivada da Função Arco Tangente: Se $f(x) = \text{arc tg } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Demonstração:

É fato que $f(x) = \text{arc tg } x$ é a função inversa de $g(x) = \text{tg } x$, onde $g'(x) = \sec^2 x$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arc tg } x)} = \frac{1}{1+\text{tg}^2(\text{arc tg } x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

2.6.19. Derivada da Função Arco Cotangente:

Se $f(x) = \text{arc cot } x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Demonstração:

$f(x) = \text{arc cotg } x$ é a função inversa de $g(x) = \text{cotg } x$, onde $g'(x) = -\text{cossec}^2 x$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{-\text{cossec}^2(\text{arccot } x)} = -\frac{1}{1+\cot^2(\text{arccot } x)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

2.6.20. Derivada da Função Arco Secante:

Se $f(x) = \text{arc sec } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

Demonstração:

$f(x) = \text{arc sec } x$ é a função inversa de $g(x) = \sec x$, onde $g'(x) = \sec x.\text{tg } x$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec(\text{arcsec } x).\text{tg}(\text{arcsec } x)} = \frac{1}{x.(\pm\sqrt{1-\sec^2(\text{arc sec } x)}} =$$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

2.6.21. Derivada da Função Arco Cossecante:

Se $f(x) = \text{arc cossec } x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

Demonstração:

Sabe-se que se $f(x) = \text{arc cossec } x$ é a função inversa de $g(x) = \text{cossec } x$, onde $g'(x) = -\text{cossec } x.\cot x$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{-\text{cossec } x(\text{arccos sec } x).\cot(\text{arccos sec } x)} =$$

$$= -\frac{1}{x.(\pm\sqrt{1-\text{cossec}^2(\text{arccos sec } x)}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

TABELA DE DERIVADAS

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
k	0	$\text{tg } x$	$\sec^2 x$
x^n	nx^{n-1}	$\cot x$	$-\text{cossec}^2 x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sec x$	$\sec x.\text{tg } x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}$	$\text{cossec } x$	$-\text{cossec } x.\cot x$
e^x	e^x	$\text{arc sen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x.\ln a$	$\text{arc cos } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\text{arc tg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}.\log_a e$	$\text{arc cot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\text{sen } x$	$\cos x$	$\text{arc sec } x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\text{sen } x$	$\text{arc cossec } x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$

2.7. DERIVADAS SUCESSIVAS

No item 2.4 desse capítulo a derivada foi definida como uma função. Como a derivada de uma função é uma função é possível fazer a derivada da função derivada e esse procedimento pode seguir indefinidamente, sempre derivando a função derivada obtida no processo anterior. A nomenclatura para as funções derivadas obtidas, de acordo com a ordem da derivada, é segunda derivada, terceira derivada, quarta derivada e assim por diante. A notação mais usada para 2ª derivada é $f''(x)$, para 3ª derivada é $f'''(x)$, para a 4ª derivada é $f^{(4)}(x)$, para a 5ª derivada é $f^{(5)}(x)$ e para a nª derivada é $f^{(n)}(x)$, para $n \geq 4$. Entretanto, também é aceita a notação $\frac{df}{dx}$ pra derivada, $\frac{d^2f}{dx^2}$ pra segunda derivada, $\frac{d^3f}{dx^3}$ pra terceira derivada e assim sucessivamente.

Por exemplo, se $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - x^3$, tem-se as seguintes derivadas sucessivas:

$f'(x) = 5.2x^{5-1} - 4.5x^{4-1} - 3x^{3-1} = 10x^4 - 20x^3 - 3x^2$
$f''(x) = 4.10x^{4-1} - 3.20x^{3-1} - 2.3x^{2-1} = 40x^3 - 60x^2 - 6x$
$f'''(x) = 3.40x^{3-1} - 2.60x^{2-1} - 1.6x^{1-1} = 120x^2 - 120x - 6$
$f^{(4)}(x) = 2.120x^{2-1} - 1.120x^{1-1} = 240x - 120$
$f^{(5)}(x) = 1.240x^{1-1} = 240$
$f^{(6)}(x) = 0$
$f^{(7)}(x) = 0$

Repare que $f^{(n)}(x) = 0$, $n \geq 6$.

A aplicação de derivadas sucessivas também vale quando é necessário aplicar a regra da cadeia ou a regra do produto de duas funções. Por exemplo, sendo $g(x) = \text{sen } x^2$, segue que:

$g'(x) = (\cos x^2).2x = 2x.\cos x^2$
$g''(x) = (2x)'.\cos x^2 + 2x.(\cos x^2)' = 2\cos x^2 + 2x(-\text{sen } x^2).2x = 2\cos x^2 - 4x^2.\text{sen } x^2$

No caso de $h(x) = e^x$, as derivadas sucessivas são todas iguais à função original:

$h'(x) = e^x$
$h''(x) = e^x$
$h'''(x) = e^x$
$h^{(n)}(x) = e^x$, $n \geq 4$

É possível demonstrar, porém não faz parte do objetivo desse livro, que a função exponencial neperiano é a única função não nula em que $h'(x) = h(x)$, para todo x que pertence simultaneamente aos domínios de $h'(x)$ e $h(x)$.

O estudo das derivadas sucessivas vai ganhar maior destaque quando for apresentado o tópico de máximos e mínimos de uma função, bem como as técnicas da construção de gráficos.

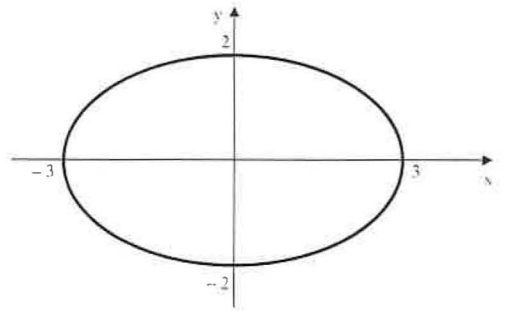
2.8. DERIVADAS IMPLÍCITAS

Até o item anterior desse livro todas as funções foram apresentadas de forma explícita, ou seja, a fórmula para o cálculo de $f(x)$ estava em função de x. Isso facilita o processo de derivação da função. Entretanto, nem sempre é prático ou mesmo possível explicitar o $f(x)$ em função do x. Nesses casos, normalmente, tem-se uma expressão que relaciona a função à variável. Afirma-se que a função está representada de forma implícita por essa expressão. Por exemplo, a expressão algébrica $f(x) + \log f(x) = x$ define, de forma implícita, a função $f(x)$. Não é possível isolar $f(x)$ em função de x. Porém, esse tipo problema não impede de calcular a derivada da função num ponto. Para tanto, basta derivar a função implicitamente em x, aplicando a regra da cadeia, obtendo uma outra expressão algébrica onde aparece $f'(x)$ e x. Para facilitar a notação da derivada implícita será adotada, apenas nesse tópico, a notação $f(x) = y$, muito comum em geometria analítica. Desse modo, o exemplo já citado nesse parágrafo é equivalente a $y + \log y = x$.

Como há duas situações bem distintas, a análise da derivação implícita será dividida em dois casos.

2.8.1. Quando não é prático isolar f(x) em função de x

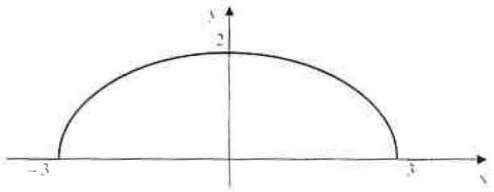
De acordo como foi apresentado no início desse capítulo, a derivada de uma função está ligada diretamente com a determinação da reta tangente à uma curva num ponto P. Contudo, nem toda curva é uma função, o que complica, mas não impede de determinar a reta tangente num ponto utilizando a derivada. Por exemplo, se sabe que a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ representa, no plano cartesiano, uma elipse centrada na origem, com semieixo maior 3 e semieixo menor 2, como ilustrado na figura abaixo.



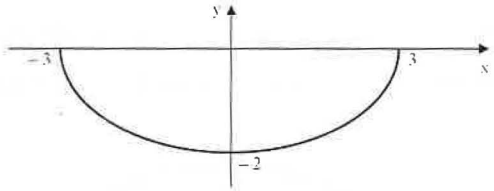
Perceba que essa curva não representa uma função. De fato, existem retas paralelas ao eixo y que cortam o gráfico da elipse em dois pontos, ferindo a condição de não ambiguidade.

Para que seja possível utilizar tudo que já foi explanado nesse capítulo para determinar a reta tangente ao gráfico da elipse, num determinado ponto P, é necessário, dependendo da posição do ponto P, tomar apenas a porção do gráfico da

elipse acima do eixo x ou abaixo do eixo x. Delimitando de uma dessas porções do gráfico da elipse é possível explicitar uma fórmula de y = f(x) em função de x. Por exemplo, tomando a porção do gráfico da elipse para $y \geq 0$ obtém-se o gráfico abaixo, que representa uma função.



Isolando y em função de x, para $y \geq 0$, obtém-se $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$. Caso o ponto P da elipse, onde deseja-se passar a reta tangente, possua ordenada maior ou igual a zero, basta derivar $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ em relação a x e substituir a abscissa de P na função derivada obtida, pra calcular o coeficiente angular da reta tangente em P. No caso do ponto P da elipse, por onde deve passar a reta tangente, estiver no 3° ou 4° quadrantes do plano cartesiano, a relação entre y e x é dada por $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$. O gráfico dessa função está representado abaixo.



Entretanto, convenhamos que esse processo, apesar de possível, não é nada prático. Além do mais, existe uma outra maneira bem mais simples de obter a reta tangente, usando a relação implícita de y e x dada pela equação da elipse.

Agora é fundamental relembrar a regra da cadeia. Se f(x) é uma função composta, do tipo f(x) = g(h(x)), então f'(x) = g'(h(x)).h'(x). Aplicando a regra da cadeia é possível derivar, na variável x, a equação da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. A parcela $f(x) = \frac{x^2}{9}$ é tranquila de ser derivada em x. Porém, como derivar, em x, a parcela $g(y) = \frac{y^2}{4}$? Bem simples! Basta lembrar que y é uma função na variável x, fazendo com que g(y) seja uma função composta (do tipo g(y(x)) e aplicar a regra da cadeia,

obtendo g'(y).y'. Se preferir, pode também ser usada a notação de Leibniz: $\frac{d(g(y))}{dx} = \frac{d(g(y))}{dy}.\frac{dy}{dx}$. Pra finalizar, lembre-se que a derivada de 1 é 0:

$$\frac{d\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)}{dx} = \frac{d(1)}{dx} \Rightarrow \frac{2x}{9} + \frac{2y}{4}.\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$

A substituição das coordenadas de P(x, y) nessa última expressão permite determinar $\frac{dy}{dx}$, que é igual ao coeficiente da reta tangente à elipse no ponto P.

Perceba que esse método de derivar a equação da curva em x é bem mais prático que tomar uma porção do gráfico da curva que seja uma função (e que contenha o ponto onde deve passar a reta tangente), pra encontrar uma relação de y em função de x e, finalmente, derivar essa expressão em x.

Vamos aplicar o método da derivada da função implícita pra determinar a equação da reta tangente ao gráfico da hipérbole $x^2 - 2y^2 = 1$ no ponto P(3, 2). Derivando na variável x, de forma implícita, a equação da hipérbole:

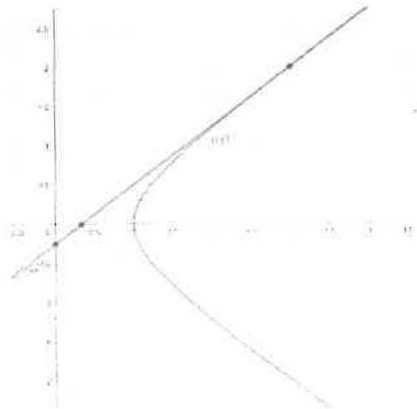
$$\frac{d(x^2 - 2y^2)}{dx} = \frac{d(1)}{dx} \Rightarrow 2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$$

Assim, o coeficiente angular da reta tangente à hipérbole no ponto P(3, 2) vale:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{x_P}{2y_P} = \frac{3}{4}$$

Pela equação da reta:

$$y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$



2.8.2. Quando não é possível isolar f(x) em função de x

No item anterior foi analisada a situação em que a derivada implícita é de aplicação mais prática do que explicitar y em função de x e fazer a derivação clássica. Contudo, há casos em que a única possibilidade é a derivada implícita, pois não é possível explicitar y em função de x. Por exemplo, considere a curva, no plano cartesiano, descrita pela equação $x - e^y + y^2 = 0$, cujo gráfico está representado na figura abaixo.

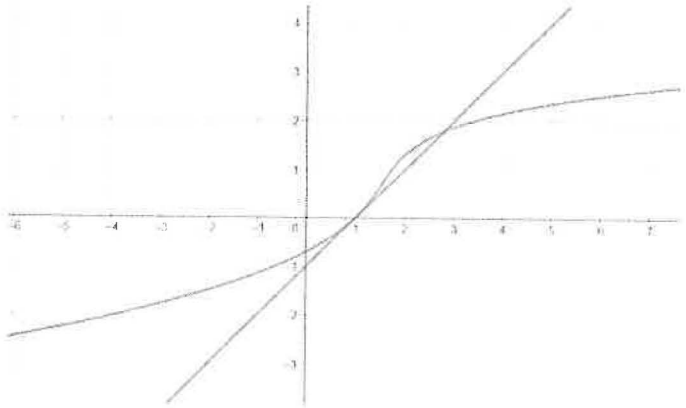
Apesar do gráfico poder representar uma função, não é possível escrever y em função de x. A única maneira de calcular a derivada num ponto do gráfico é fazendo a derivada implícita. Por exemplo, suponha que se deseja calcular a reta tangente ao gráfico de $x - e^y + y^2 = 0$ no ponto P(1, 0). Derivando implicitamente em x:

$$\frac{d(x - e^y + y^2)}{dx} = \frac{d(0)}{dx} \Rightarrow 1 - e^y \frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - 2y}$$

Substituindo $y = 0 \Rightarrow m = \frac{dy}{dx} = 1$.

Substituindo na equação da reta:

$$y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow x - y - 1 = 0$$



Exercícios Resolvidos

01) (EFOMM-94) A reta tangente à curva $y = 7x - 3x^2$ no ponto P faz um ângulo de 45° com o eixo dos **x**. O ponto P da curva tem coordenadas:

(A) (0, 0) (B) (2, 2) (C) (-1, -10) (D) (3, - 6) (E) (1, 4)

Solução: Alternativa E

Se a reta tangente faz um ângulo de 45° com o eixo, então seu coeficiente angular é igual a 1, ou seja, $\frac{dy}{dx} = 1$;

Derivando a função: $\frac{dy}{dx} = 7 - 6x = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow P(1, 4)$

02) (EFOMM-98) Se $f(x) = \text{sen } 3x$ e $M = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

a) – 7 b) – 21 c) 8 d) 24 e) 25

Solução: Alternativa B

$f(x) = \text{sen } 3x \Rightarrow f'(x) = 3.\cos 3x \Rightarrow f''(x) = -9.\text{sen } 3x \Rightarrow$
$f'''(x) = -27.\cos 3x$

$$M = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\pi - 9\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} - 27\cos 2\pi = -3 + 9 - 27 = -21$$

03) (IME-51) Determinar a equação da tangente à curva $y = x \log x$ no ponto em que seu coeficiente angular é 2/3.

Solução:

Sendo $g(x) = x$ e $h(x) = \log x$, segue que $f(x) = g(x).h(x)$

$$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x) = 1.\log x + x.\frac{\log e}{x} = \log x + \log e$$

Como o coeficiente angular é 2/3:

$$\frac{2}{3} = \log x + \log e \Rightarrow \log x = \frac{2}{3} - \log e = \log 10^{2/3} - \log e = \log\frac{10^{2/3}}{e} \Rightarrow x = \frac{10^{2/3}}{e}$$

Assim, a reta é tangente à curva no ponto $\left(\frac{10^{2/3}}{e}, \frac{10^{2/3}}{e}\log\frac{10^{2/3}}{e}\right)$

A equação da reta vale:

$$y - \frac{10^{2/3}}{e}\log\frac{10^{2/3}}{e} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{10^{2/3}}{e}\right) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\frac{10^{2/3}}{e} + \frac{10^{2/3}}{e}\log\frac{10^{2/3}}{e}$$

04) (IME-68) Seja f uma função definida na coleção dos números reais, tal que:

i) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

ii) $f(0) = 0$.

a) Determine a função f' derivada de f.

b) Diga, justificando, se f' é ou não contínua.

Solução:

a) Sejam $g(x) = x^2$ e $h(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, ou seja, $f(x) = g(x).h(x)$.

$$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x) = 2x.\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2.\cos\frac{1}{x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x.\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

b) Claramente, há uma descontinuidade em $x = 0$ na função $f'(x)$.

05) (EN-22) Sejam as funções f e g tais que $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 2x$, $g'(x) = \frac{2}{x+3}$ e $g(1) = 0$. O valor de $(fog)'(1)$ é igual a:

a) ln 16 b) 5.ln 4 c) 0 d) 1 e) 1/2

Solução: Alternativa D

Inicialmente, observe que: $f'(x) = 20x^3 - 6x^2 + 2$

Pela regra de derivada da função composta:

$$(f(g(1)))' = f'(g(1)).g'(1) = f'(0).g'(1) = 2.\frac{1}{2} = 1$$

06) (EFOMM-95) Sabendo que $f(x) = tg^2(3x+1)$, o valor de $f''(-\frac{1}{3})$ é:

(A) 24 (B) 22 (C) 20 (D) 18 (E) 16

Solução: Alternativa D

A função f(x) é definida como uma tripla composição de funções.

Sendo $g(x) = x^2$, $g(x) = tg\ x$ e $t(x) = 3x + 1$, então $f(x) = g(h(t(x)))$.

Assim, $f'(x) = g'(h(t(x)).h'(t(x)).t'(x) = 2tg(3x+1).\sec^2(3x+1).3 \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{6\operatorname{sen}(3x+1)}{\cos^3(3x+1)}$$

$$f''(x) = \frac{6.\cos(3x+1).3.\cos^3(3x+1) - 6.\operatorname{sen}(3x+1).3.\cos^2(3x+1).[-\operatorname{sen}(3x+1)].3}{\cos^6(3x+1)} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{18.\cos^4(3x+1) + 54.\operatorname{sen}^2(3x+1).\cos^2(3x+1)}{\cos^6(3x+1)} \Rightarrow$$

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{18.1 + 54.0}{1} = 18$$

07) (EFOMM-95) A equação da reta normal do gráfico da função $y = e^{\operatorname{sen}(x^2-1)}$ no ponto (1, 1) é:

(A) $2y - x + 3 = 0$ (B) $y + 2x - 3 = 0$ (C) $2y + x - 3 = 0$

(D) $y - 2x + 3 = 0$ (E) $2y - x - 3 = 0$

Solução: Alternativa C

Aplicando a regra da cadeia: $y' = e^{\operatorname{sen}(x^2-1)}.\cos(x^2-1).2x$

Substituindo $x = 1$: $m = e^{\operatorname{sen} 0}\cos 0.2.1 = 2$

A reta normal tem coeficiente angular $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$

A reta normal tem equação:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y - 2 = 0 - x + 1 \Rightarrow 2y + x - 3 = 0$$

08) (EFOMM-22) Seja a função real definida por $f(x) = x^3 + x + 2$. Assinale a alternativa que indica o valor da derivada da função inversa de f em $x = 0$, isto é, $(f^{-1})'(0)$.

a) – 1 b) 0 c) 1 d) 1/2 e) 1/4

Solução: Alternativa E

Pela regra de derivação da função inversa, se $g(x) = f^{-1}(x)$ então $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Note que pra calcular $g'(0)$ é necessário anteriormente calcular $f^{-1}(0)$.

Igualando f(x) a zero: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x + 2 = 0 \Rightarrow$ a única raiz real é $x = -1$

Portanto, o ponto $(-1, 0)$ pertence ao gráfico de f, fazendo com que $(0, -1)$ pertença ao gráfico de $f^{-1}(x)$, implicando que $f^{-1}(0) = -1$.

Assim: $g'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3(-1)^2+1} = \frac{1}{4}$

09) (IME-71) Um corpo se move no plano xy descrevendo a trajetória $y = Ax^2 - C$. Sua projeção no eixo dos x se move com a velocidade de B u.v. (unidades de velocidade). A velocidade da projeção vertical será, portanto:

(A) 2Ax (B) 2Ax + B (C) 2ABx (D) 2Ax – B (E) $2\frac{A}{B}x$ (F) N.R.A.

Solução: Alternativa C

Da física sabe-se que a velocidade é a derivada da posição no tempo.

Derivando implicitamente a equação da trajetória no tempo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(Ax^2 - C)}{dt} = A.2x.\frac{dx}{dt} - 0 \Leftrightarrow v_y = 2Axv_x \Rightarrow v_y = 2ABx$$

10) (IME-67) Sendo as coordenadas do ponto P (x, y) definidas por

$$\begin{cases} x = 2a\,tg\,u \\ y = 2a\cos^2 u \end{cases}$$

Pede-se calcular o valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$ no ponto zero.

Solução:

Determinando y em função de x:

$$y = 2a\cos^2 u = \frac{2a}{\sec^2 u} = \frac{2a}{1+tg^2 u} = \frac{2a}{1+\frac{x^2}{4a^2}} = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$$

$$y' = \frac{-8a^3(2x)}{(4a^2+x^2)^2} = -\frac{16a^3x}{16a^4+8a^2x^2+x^4}$$

$$y'' = -\frac{16a^3(16a^4+8a^2x^2+x^4)-16a^3x(16a^2x+4x^3)}{(16a^4+8a^2x^2+x^4)^2}$$

Substituindo x = 0: $y''(0) = -\frac{16a^3.16a^4}{(16a^4)^2} = -\frac{1}{a}$

11) (IME-70) Dada a equação x – cos (xy) = 0, calcule $\frac{dy}{dx}$.

a) $-\frac{1}{x.sen(xy)}$ b) $-\frac{1}{y.sen(xy)}$ c) y/x

d) x/y e) –(1 + y) f) nda

Solução: Alternativa F

Derivando implicitamente na variável x:

$$\frac{d(x-\cos(xy))}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dx} - \frac{d(\cos(xy))}{dx} = 0 \Rightarrow 1+sen(xy)\frac{d(xy)}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$1+sen(xy)\left(\frac{dx}{dx}.y + x.\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Rightarrow 1+sen(xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$1+y\,sen(xy)+x\,sen(xy)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y\,sen(xy))}{x\,sen(xy)}$$

12) (IME-71) Dada a função $z = \frac{u^v}{v^u}$, onde $u = \frac{1}{3}x^3$ e v = x^2, assinalar, entre os valores abaixo, o correspondente a $\frac{dz}{dx}$ no ponto em que x = 1.

a) $-\frac{3}{2}\log_e 2 - \frac{7}{9}$ b) $\frac{3}{2}\log_e 2 + \frac{7}{9}$ c) $-\frac{2}{3}\log_e 3 + \frac{7}{9}$

d) $\frac{2}{3}\log_e 3 - \frac{7}{9}$ e) $-\frac{2}{3}\log_e 2 + \frac{9}{7}$ e) NRA

Solução: Alternativa C

Inicialmente, perceba que para x = 1 tem-se $u = \frac{1}{3}$ e v = 1.

Vamos agora calcular as derivadas de u^v e v^u na variável x.

i) $y = u^v \Rightarrow \ln y = \ln u^v = v.\ln u \Rightarrow \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(v.\ln u)}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = \frac{dv}{dx}.\ln u + v.\frac{d(\ln u)}{dx} = 2x.\ln\frac{x^3}{3} + x^2.\frac{3}{x^3}.x^2 = 2x.\ln\frac{x^3}{3} + 3x$$

Substituindo x = 1: $\frac{y'}{\frac{1}{3}} = 3 + 2.\ln\frac{1}{3} \Rightarrow y' = 1 - \frac{2}{3}\ln 3$

ii) $w = v^u \Rightarrow \ln w = \ln v^u = u.\ln v \Rightarrow \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{d(u.\ln v)}{dx}$

$$\frac{w'}{w} = \frac{du}{dx}.\ln v + u.\frac{d(\ln v)}{dx} = x^2.\ln x^2 + \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x^2}.2x = x^2.\ln x^2 + \frac{2x^2}{3}$$

Substituindo x = 1: $\frac{w'}{1} = 1.\ln 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow w' = \frac{2}{3}$

Finalmente: $z = \frac{u^v}{v^u} \Rightarrow \frac{dz}{d(x=1)} = \frac{(u^v)'.v^u - u^v.(v^u)'}{(v^u)^2} = \frac{\left(1-\frac{2}{3}\ln 3\right).1 - \frac{1}{3}.\frac{2}{3}}{(1^{1/3})^2} \Rightarrow$

$$\frac{dz}{d(x=1)} = \frac{7}{9} - \frac{2}{3}\ln 3$$

13) (IME/CG-15) Em um certo ambiente, existem alguns tipos de bactérias. A concentração da bactéria A em função do tempo t, em horas, é expressa por:

$$f(t) = \frac{a}{1+e^{bt}},\ t \geq 0$$

Se no instante t = 0 a concentração da bactéria A é de 20 $g.m^{-3}$ e a mesma cresce com velocidade de 2 $g.m^{-3}.h^{-1}$, determine os valores de a e b e determine qual será o seu valor após um longo período de tempo.

Solução:

Para t = 0 tem-se f(0) = 20: $f(0)=20=\frac{a}{1+e^0}=\frac{a}{2} \Rightarrow a = 40\ g.m^{-3}$

Assim: $f(t)=\frac{40}{1+e^{bt}} \Rightarrow f'(t)=\frac{-40.b.e^{bt}}{(1+e^{bt})^2}$

$f'(0)=2=\frac{-40.b.e^0}{(1+e^0)^2}=-10b \Rightarrow b=-\frac{1}{5}$

Logo, a expressão da concentração de A vale $f(t)=\frac{40}{1+e^{\frac{-t}{5}}}$, $t \geq 0$.

Para um tempo tendendo a infinito: $\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{40}{1+e^{\frac{-t}{5}}}=\frac{40}{1+1}=20\ g.m^{-3}$

14) (IME/CG-20) Seja $f(x)=\sqrt{sen(7x+\ln(5x))}$. Calcule a 1ª derivada da função f(x).

Solução:

Note que f(x) é resultado de três composições de funções:

f(x) = g(h(t(x))), onde $g(x)=\sqrt{x}$, h(x) = sen x e t(x) = 7x + ln(5x)

Pela regra de derivada da função composta:

f'(x) = g'(h(t(x))).h'(t(x)).t'(x) $\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{sen(7x+\ln(5x))}}.\cos(7x+\ln(5x)).\left(7+\frac{\not{5}}{\not{5}x}\right) \Rightarrow$

$f'(x)=\frac{\cos(7x+\ln(5x))}{2\sqrt{sen(7x+\ln(5x))}}\left(7+\frac{1}{x}\right)$

15) (IME/CG-21) Dada a função abaixo, mostre que o coeficiente angular de toda reta tangente a essa função é negativo.

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{3}+2x)^7}+tg(15-40x^3)$$

Solução:

Sabe-se que o coeficiente angular da reta tangente é igual à derivada na função:

$f'(x)=\frac{-7.2}{(\sqrt{3}+2x)^8}+\sec^2(15-40x^3).(-120x^2) \Rightarrow$

$f'(x)=-\left[\frac{14}{(\sqrt{3}+2x)^8}+120x^2\sec^2(15-40x^3)\right]$

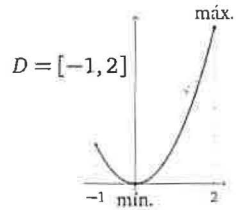
Como as parcelas dentro dos colchetes são sempre positivas, segue que f'(x) < 0

2.9. MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO

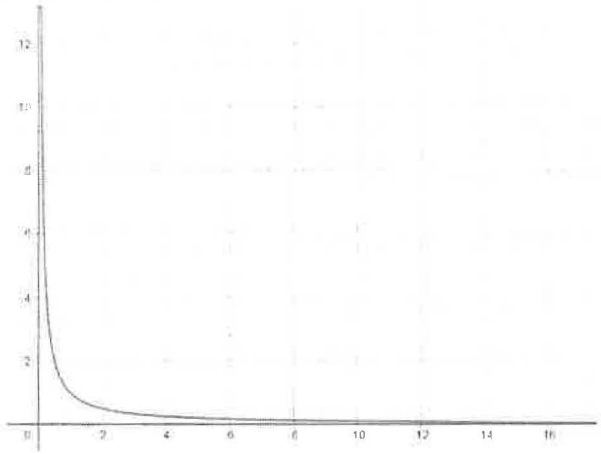
2.9.1. Extremos Globais

Considere uma função f:A→B, com A⊂IR e B⊂IR. Um ponto $x_{max} \in A$ é um ponto de máximo global de f se $f(x_{max}) \geq f(x)$, para todo $x \in A$. Afirma-se, então, que a função f(x) assume seu valor máximo em $x = x_{max}$. Um ponto $x_{max} \in A$ é um ponto de máximo global de f se $f(x_{max}) \geq f(x)$, para todo $x \in A$. Afirma-se, então, que a função f(x) assume seu valor máximo em $x = x_{max}$. Um ponto $x_{min} \in A$ é um ponto de mínimo global de f se $f(x_{min}) \leq f(x)$, para todo $x \in A$. Afirma-se, então, que a função f(x) assume seu valor mínimo em $x = x_{min}$.

Por exemplo, a função f: [– 1, 2]→IR dada por $f(x) = x^2$ tem máximo global em $x_{max} = 2$ e mínimo global em $x_{min} = 0$, como ilustra o gráfico seguinte.

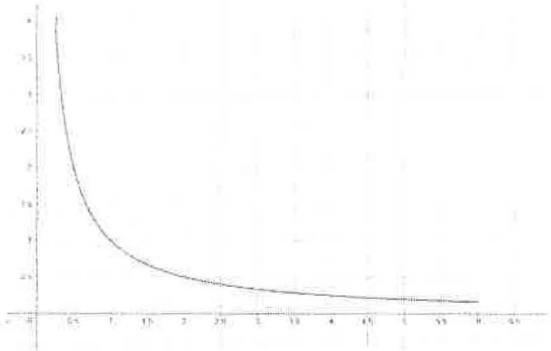


Há funções que, apesar de contínuas, não admitem nem máximo nem mínimo. Por exemplo, a função f:]0, +∞)→IR dada por $f(x)=\frac{1}{x}$ não admite um máximo global nem um mínimo global. De fato, observando o gráfico da função, ilustrado abaixo, é imediato que f tem a infinito quando x tende a zero e que f tende a zero quando x tende a infinito.



Note, também, que uma função não possuir máximos ou mínimos globais não significa que ela não seja limitada superiormente ou inferiormente. No exemplo anterior f não admite um mínimo global, mas é limitada inferiormente, uma vez que, para todo $x > 0$ segue que $f(x) > 0$.

Perceba que o fato de $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, não admitir máximo global nem mínimo global ocorreu porque a função tem assíntotas, que faz f tender a infinito ou a zero quando x tende a zero ou a infinito, respectivamente. Caso o domínio da função seja um intervalo limitado [a, b], com $a < b$, não existirão assíntotas e a função admitirá um máximo global e um mínimo global. Por exemplo, se restringirmos o domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ para o intervalo [1/4, 6], como ilustrado no gráfico abaixo, a função agora admite um máximo global em $x_{max} = 1/4$, que vale $f_{max} = 4$, e um mínimo global em $x_{min} = 6$, que vale $f_{min} = 1/6$.



A generalização do exemplo anterior permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema: Se f é uma função contínua com domínio em [a, b], com $a < b$, então f admite um máximo global e um mínimo global em [a, b].

Para determinar máximos e/ou mínimos de uma função é importante compreender as condições para que a função seja crescente ou decrescente num intervalo.

Teorema: Seja f é uma função derivável no intervalo [a, b]:
1. Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$ então f é estritamente crescente em [a, b];
2. Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$ então f é estritamente decrescente em [a, b];
3. Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$ então f é constante em [a, b].

Demonstração:
Vamos analisar o caso da função estritamente crescente. O caso da decrescente é análogo.

Se $c \in [a, b]$, segue que $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$, ou seja, $x > c \Leftrightarrow f(x) > f(c)$, que caracteriza f(x) como uma função estritamente crescente.

Se $c \in [a, b]$, segue que $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$ ocorre apenas de f(x) = f(c), para qualquer $x \in [a, b]$, implicando que f é constante.

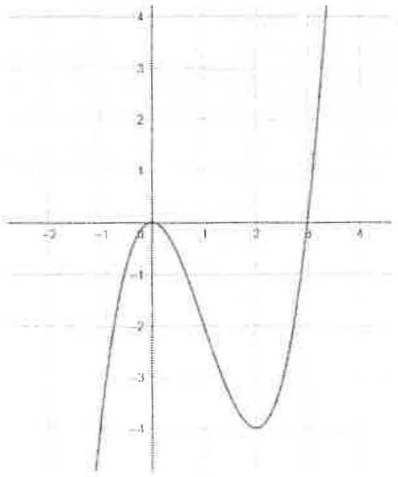
Vamos aplicar esse teorema pra analisar o comportamento de crescimento e decrescimento da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

i) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
ii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$

Aplicando o teorema, segue que a função f(x) é estritamente crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$ e f(x) é estritamente decrescente no intervalo (0, 2).

De fato, a análise algébrica concorda com o gráfico da função:

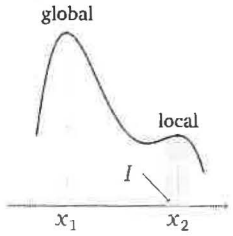


A análise do crescimento/decrescimento de uma função será a base de um critério que é usado pra determinar máximos e mínimos de uma função, denominado de "Teste da Primeira Derivada", que será abordado mais adiante nesse mesmo capítulo.

2.9.2. Extremos Locais

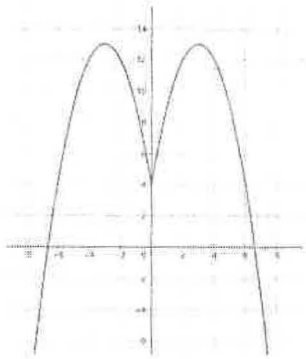
Definição: Considere uma função real f de domínio D. Um ponto $a \in D$ é denominado de máximo local de f se existir um intervalo $A \subset D$, com $a \in A$, tal que $f(a) \geq f(x)$, qualquer que seja $x \in A$. Analogamente, um ponto $b \in D$ é denominado de mínimo local de f se existir um intervalo $B \subset D$, com $b \in B$, tal que $f(b) \geq f(x)$, qualquer que seja $x \in B$.

A figura abaixo ilustra uma situação de máximo local. A função apresenta um máximo global em x_1. Porém, para todo $x \in I$, ocorre que $f(x_2) \geq f(x)$, caracterizando x_2 como um ponto de máximo local.



Note que todo ponto de máximo global também é ponto de máximo local. O contrário não ocorre, necessariamente. Na verdade, o ponto de máximo global, quando existe (lembre-se que a função pode tender pra infinito), é um dos pontos de máximos locais, exatamente onde a função admite o maior valor entre os máximos locais.

Nada impede de uma função admitir dois ou mais pontos de máximos globais. Por exemplo, a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 6|x| + 4$ admite dois máximos globais, um em $x = -3$ e o outro em $x = 3$, como confirma o gráfico da função.



Tudo que foi explanado no parágrafo anterior para máximos globais também vale para mínimos globais.

Verifique que os pontos de máximo ou mínimo locais ou globais foram justificados até agora analisando o gráfico da função. Mas e quando o gráfico não é fornecido ou não é prático determina-lo? O teorema seguinte mostra como determinar os candidatos a pontos de máximo ou mínimo locais de uma função contínua.

Teorema: Se f(x) é uma função derivável e a é um ponto de máximo ou mínimo local de f então $f'(a) = 0$.

Demonstração:

A demonstração será feita para o caso de máximo local. A demonstração para mínimo local é análoga. Se a é um ponto máximo local então para os pontos x da vizinhança de a tem-se que $f(a) \geq f(x)$. Calculando os limites laterais quando $x \to a$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \geq 0 \quad \text{e} \quad f'(a) = \lim_{x \to a^+} \overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \leq 0$$

≤ 0 $\qquad$ ≥ 0

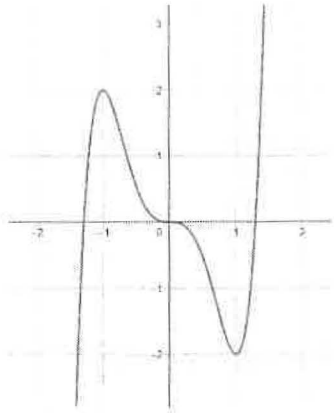
Dos limites laterais se conclui que $f'(a) = 0$.

Note que o teorema não é uma implicação do tipo "se e somente se". É possível que $f'(a) = 0$ e a não seja ponto de máximo local nem ponto de mínimo local. Em outras palavras, esse último teorema permite determinar candidatos a máximos e mínimo locais de uma função derivável.

Por exemplo, vamos aplicar o teorema anterior na análise de máximos e mínimos locais da função $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. Resolvendo $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Assim, os candidatos a máximos locais da função são 0, 1 e -1. Contudo, apenas -1 é máximo local e 1 é mínimo local. Observando o gráfico abaixo da função, se percebe que 0 não é máximo nem mínimo local.



Antes de enunciarmos os critérios pra verificar quais pontos a, em que $f'(a) = 0$, são pontos de máximo ou mínimo locais, vamos a uma definição:

2.9.2.1. Pontos Críticos: Considere uma função f: A→B derivável. Afirmamos que $a \in A$ é ponto crítico de f se $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ não existe.

Agora vamos apresentar dois critérios pra decidir se um ponto crítico de uma função é máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois.

2.9.2.2. Teste da Primeira Derivada: Considere que f(x) é uma função contínua com um ponto crítico em $c \in (a, b)$. Caso f seja derivável em (a, c) e (c, b),

i) se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, b)$ então f possui um máximo local em c.

ii) se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, b)$ então f possui um mínimo local em c.

iii) Se $f'(x)$ possui mesmo sinal em (a, c) e (c, b) então c não é ponto de extremo local de f.

Demonstração:

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c) \Rightarrow$ f é estritamente crescente em $(a, c) \Rightarrow$ $f(c) > f(x)$, $\forall x \in (a, c)$ (1)

se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, b) \Rightarrow$ f é estritamente decrescente em $(c, b) \Rightarrow$ $f(c) > f(x)$, $\forall x \in (c, b)$ (2)

De (1) e (2) segue que $f(c) > f(x)$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow$ c é ponto de máximo local de f

ii) Demonstração análoga ao item anterior, ficará a cargo do leitor

iii) Se $f'(x)$ não muda de sinal então f mantém sua tendência de crescimento ou decrescimento no intervalo (a, b), fazendo com que c não seja ponto de máximo nem mínimo de f.

Vamos agora aplicar o teste da primeira derivada pra verificar, sem auxílio de um gráfico, os pontos de máximos locais e/ou mínimos locais da função que foi apresentada na página anterior: f:IR→IR, dada por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow$

os pontos críticos de f são $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$

i) se $x \in (-\infty, -1)$ então $f'(x) > 0$

ii) se $x \in (-1, 0)$ então $f'(x) < 0$

iii) se $x \in (0, 1)$ então $f'(x) < 0$

iv) se $x \in (1, +\infty)$ então $f'(x) > 0$

Aplicando o teste da primeira derivada conclui-se que -1 é ponto de máximo local, 0 não é máximo nem mínimo local e 1 é ponto de mínimo local de f.

Perceba que essas conclusões batem perfeitamente com o gráfico da função, apresentado na página anterior.

2.9.2.3. Teste da Segunda Derivada: Seja f uma função derivável duas vezes em um intervalo (a, b) e $c \in (a, b)$.

i) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0 \Rightarrow$ f tem um mínimo local em c.

ii) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0 \Rightarrow$ f tem um máximo local em c.

iii) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0 \Rightarrow$ o teste é inconclusivo (c pode ser ponto de máximo, mínimo ou nenhum dos dois).

Demonstração:

(i) Se $f''(c) > 0$ então $f'(x)$ é crescente na vizinhança $x = c$. Como $f'(c) = 0$, então infinitesimalmente à esquerda de c tem-se $f'(x) < 0$ infinitesimalmente à direita de c tem-se $f'(x) > 0$. Pelo teste da primeira derivada, segue que c é ponto de máximo local de f.

As demonstrações dos itens (ii) e (iii) ficarão como exercício pro leitor.

Vamos agora aplicar o teste da segunda derivada pra determinar os pontos de máximo e mínimo locais da função f: IR→IR dada por $f(x) = x^4 - 2x^2$:

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = 0$ ou $x = 1$ (pontos críticos)

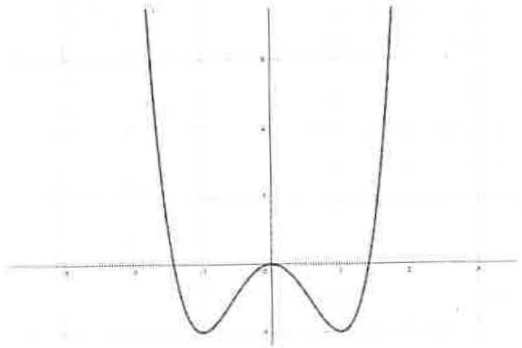
Segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 - 4$

i) $f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow -1$ é ponto de mínimo local de f

ii) $f''(0) = 0 - 4 < 0 \Rightarrow 0$ é ponto de máximo local de f

iii) $f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow 1$ é ponto de mínimo local de f

Observando o gráfico de f, conclui-se que a análise algébrica realmente concorda com a análise gráfica:



Nesse momento o leitor deve estar se perguntando qual teste é preferível de ser usado na determinação dos máximos e mínimos locais de uma função? A resposta é simples! O teste da segunda derivada é mais prático que o da primeira derivada. O único inconveniente do teste da segunda derivada é quando $f''(c) = 0$, onde o teste é inconclusivo. Apenas nesse caso, utilize o teste da primeira derivada, que não tem situações inconclusivas.

2.9.3. Determinando os Extremos Globais de uma Função Contínua

Já foram apresentados neste livro todos os recursos necessários pra determinar os extremos globais de uma função. Assim, caso seja necessário, lançaremos mão de usar o cálculo de limites, determinação de assíntotas, cálculo de pontos críticos, teste da primeira derivada e teste da segunda derivada. Entretanto, nem todos esses recursos serão aplicados pra todos os tipos de funções. Um detalhe que influencia decisivamente na determinação dos extremos globais é o domínio da função. Por isso, será necessário dividir essa análise em dois casos.

1º caso: Função contínua definida num intervalo fechado do tipo |a, b|

Como a função é contínua, os candidatos a extremos globais são os pontos críticos e os extremos do intervalo. Assim, o procedimento para determinar os extremos globais de uma função f é o seguinte:

(1) Determinar os pontos críticos de f, bastando calcular x de modo de $f'(x) = 0$ ou que $f'(x)$ não está definida;

(2) Analisar quais pontos críticos de f são máximos locais e quais são mínimos locais, aplicando o teste da 1ª derivada ou o teste da 2ª derivada;

(3) Identificar a maior imagem entre os pontos de máximos locais e a menor imagem entre os pontos de mínimos locais;

(4) Calcular f(a) e f(b);

(5) O ponto de máximo global é o ponto que tem maior imagem entre todos os calculados nos itens 3 e 4 e o ponto de mínimo global é o ponto que tem menor imagem entre todos os calculados nos itens 3 e 4.

Observação: É possível adaptar os passos listados acima na determinação dos máximos globais de uma função com domínio (a, b), [a, b) ou (a, b], com a e b finitos, bastando verificar se existem assíntotas verticais nos extremos abertos do domínio.

Vamos aplicar esse procedimento para determinar máximo e mínimo globais da função f: $[-5, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 12x$.

(1) Determinando os pontos críticos: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 0 - 2$

(2) Teste da 2ª derivada: $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(2) = 12$ e $f''(-2) = -12 \Rightarrow$
-2 é ponto de máximo local e 2 é ponto de mínimo local

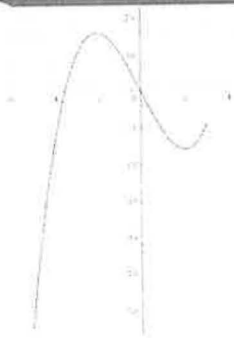
(3) Calculando as imagens dos pontos críticos: $f(2) = -16$ e $f(-2) = 16$

(4) Calculando as imagens dos extremos do domínio: $f(-5) = -65$ e $f(3) = -9$

(5) Dentre todas as imagens dos itens (3) e (4), o maior valor é de $f(-2)$, fazendo com que -2 seja o ponto de máximo global de f

Dentre todas as imagens dos itens (3) e (4), o menor valor é de $f(-5)$, fazendo com que -5 seja o ponto de mínimo global de f

O gráfico da função está representado na imagem seguinte, confirmando os pontos de máximo e mínimo globais calculados.



Considere agora a função f: $[-2, 3) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{5x^2}{9 - x^2}$. Apesar do intervalo ser aberto em 3 (há um motivo pra isso!), é possível aplicar o passo a passo pra intervalos fechados:

(1) $f'(x) = \frac{10x(9 - x^2) - 5x^2(-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{90x}{(9 - x^2)^2} \Rightarrow$

0, 3 e -3 são os pontos críticos de f, porém 3 e -3 estão fora do domínio de f

(2) $f'(x) < 0$ antes de 0 e $f'(x) > 0$ depois de 0 $\Rightarrow$ 0 é ponto de mínimo local

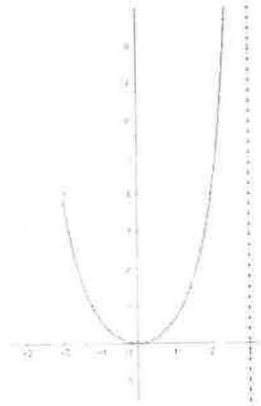
Perceba que $\lim_{x \to 3^-} \frac{5x^2}{9 - x^2} = +\infty \Rightarrow$ f não tem máximo global

(3) $f(0) = 0$

(4) $f(-2) = 4$

(5) Como $f(0) < f(-2) \Rightarrow$ 0 é mínimo global de f

O gráfico seguinte justifica os cálculos efetuados.



2º caso: função contínua com domínio (a, b) ou $(-\infty, b]$ ou $[a, +\infty)$ ou $(-\infty, +\infty)$

É possível adaptar para esse caso o procedimento do 1º caso. O que se deve acrescentar é o cálculo dos limites de f nos extremos infinitos no 4º passo. O procedimento pra esse caso é o seguinte:

(1) Determinar os pontos críticos de f, bastando calcular x de modo de $f'(x) = 0$ ou que $f'(x)$ não está definida;

(2) Analisar quais pontos críticos de f são máximos locais e quais são mínimos locais, aplicando o teste da 1ª derivada ou o teste da 2ª derivada;

(3) Identificar a maior imagem entre os pontos de máximos locais e a menor imagem entre os pontos de mínimos locais;

(4) Calcular a imagem do extremo finito fechado (caso exista) e o(s) limite(s) no(s) extremo(s) infinito(s) ou finito(s) aberto(s);

(5) Esse é o passo mais alterado em relação ao 1º caso, pois depende do(s) valor(es) calculado(s) dos(s) limite(s) no item anterior. Caso todos os limites sejam finitos, basta comparar esses limites com os máximos e mínimos locais calculados no passo 2. Caso pelo menos um desses limites tender pra $\pm\infty$, é necessário aplicar o seguinte teorema:

Teorema: Se f é uma função contínua e se se L_1 é o limite de f(x) quando x tende ao extremo esquerdo do domínio (pode ser a^+ ou $-\infty$) e se L_2 é o limite de f(x) quando x tende ao extremo direito do domínio (pode ser b^- ou $+\infty$):

(a) Se $L_1 = L_2 = +\infty \Rightarrow$ f tem um mínimo global e não tem máximo global

(b) Se $L_1 = L_2 = -\infty \Rightarrow$ f tem um máximo global e não tem mínimo global

(c) Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = -\infty \Rightarrow$ f não tem extremos globais

(d) Se $L_1 = -\infty$ e $L_2 = +\infty \Rightarrow$ f não tem extremos globais

Chegou o momento de aplicar esse procedimento na análise de máximos globais de uma função. Suponha que f: $(-\infty, +\infty)$, dada por $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$.

(1) $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x-1)(x-3) \Rightarrow$

0, 1 e 3 são os pontos críticos de f

(2) $f''(x) = 36x^2 - 96x + 36 = 12(3x^2 - 8x + 3)$

Como $f''(0) > 0 \Rightarrow$ 0 é ponto de mínimo local

Como $f''(1) < 0 \Rightarrow$ 1 é ponto de máximo local

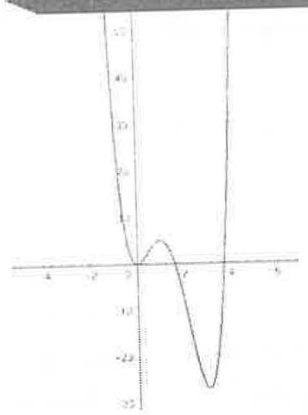
Como $f''(3) > 0 \Rightarrow$ 3 é ponto de mínimo local

(3) $f(0) = 0$, $f(1) = 5$ e $f(3) = -27$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ f não tem máximo global e f tem um mínimo global

Como $f(3) < f(0)$ então 3 é ponto de mínimo global.

Observe como o gráfico da função (os eixos não estão na mesma escala!) justifica todas as conclusões do método algébrico:



Considere agora a função f: $(-\infty, 4) \to \mathbb{R}$ cuja fórmula é $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$. Vamos determinar, casos existam, os pontos de máximo e mínimo globais, seguindo o passo a passo já apresentado:

(1) $f'(x) = \frac{2x(4-x) - x^2(-1)}{(4-x)^2} = \frac{8x - x^2}{(4-x)^2} \Rightarrow$

0, 4 (fora do domínio) e 8 (fora do domínio) são os pontos críticos de f(x)

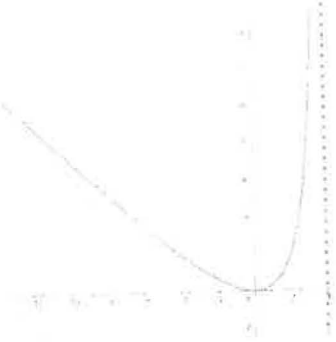
(2) Note que $f'(x) < 0$ quando $x \to 0^+$ e $f'(x) > 0$ quando $x \to 0^-$, ou seja, 0 é ponto de mínimo local de f(x)

(3) $f(0) = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to4^-} \frac{x^2}{4-x} = +\infty \Rightarrow$ assíntota vertical em $x = 4 \Rightarrow$ f não tem máximo global

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4-x} = +\infty \Rightarrow$ f tem mínimo global, que é 0

O gráfico da função concorda perfeitamente com a conclusão algébrica.



01) A função $f(x)=\frac{1-2x}{x^2+2}$ tem máximo local e mínimo local, respectivamente, nos pontos

a) -2 e 1 b) -1 e 2 c) 1 e -2 d) 2 e -1 e) 1 e 2

Solução: Alternativa B

$$f'(x)=\frac{-2(x^2+2)-(1-2x).2x}{(x^2+2)^2}=\frac{2(x^2-x-2)}{x^4+4x^2+4}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2$ ou $x=-1$

$$f''(x)=\frac{2(2x-1)(x^4+4x^2+4)-2(x^2-x-2)(4x^3+8x)}{(x^2+2)^4}$$

$f''(2)=\frac{2.3.36}{6^4}>0 \Rightarrow$ 2 é ponto de mínimo

$f''(-1)=\frac{2.(-3).9}{3^4}<0 \Rightarrow -1$ é ponto de máximo

02) (EN-87) Para $x>0$, o valor mínimo de x^x é obtido para x igual a:

a) 1/10 b) 1/3 c) 1/e d) 1/2 e) 1

Solução: Alternativa C

$y=x^x \Rightarrow \ln y=\ln x^x \Rightarrow \ln y=x.\ln x \Rightarrow \frac{d(\ln y)}{dx}=\frac{d(x.\ln x)}{dx} \Rightarrow$

$\frac{y'}{y}=1.\ln x+x.\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{x^x}=1+\ln x \Rightarrow y'=x^x(1+\ln x)$

$y'=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}$

Para provar que e^{-1} é ponto é necessário analisar a segunda derivada de y:

$y''=(x^x)'+(x^x.\ln x)'=x^x(1+\ln x)+(x^x)'(1+\ln x)+\frac{x^x}{x} \Rightarrow$

$y''=x^x(1+\ln x)+x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}$

$y''(e^{-1})=(e^{-1})^{e^{-1}-1}>0 \Rightarrow e^{-1}$ é ponto de mínimo

03) (EN-91) O mínimo valor de $\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$, x real, é:

a) 0,50 b) 0,80 c) 0,85 d) 0,95 e) 1

Solução: Alternativa D

Seja $y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$

$$y'=\frac{(4x^3+2x)(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+5)(4x^3+4x)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^5-16x^3-18x}{(x^2+1)^4}$$

$y'=0 \Rightarrow 2x(x^4-8x^2-9)=0 \Rightarrow 2x(x^2-9)(x^2+1)=0 \Rightarrow$

$x=0$, $x=3$ ou $x=-3$

Perceba que para $x\in(-\infty,-3)$ tem-se $y'<0$, ou seja, y é decrescente.

Para $x\in(-3,0)$ tem-se $y'>0$, ou seja, y é crescente.

Para $x\in(0,3)$ tem-se $y'<0$, ou seja, y é decrescente.

Para $x\in(0,+\infty)$ tem-se $y'>0$, ou seja, y é cresçente.

Assim, conclui-se que -3 e 3 são pontos de mínimo e 0 é ponto de máximo.

Substituindo na função: $y_{min}=y(\pm3)=\frac{(\pm3)^4+(\pm3)^2+5}{((\pm3)^2+1)^2}=\frac{81+9+5}{(9+1)^2}=\frac{95}{100}=0,95$

04) (EN-98) A função $f(x)=x.e^{1/x}$ é decrescente no intervalo:

a) $]1,+\infty[$ b) $]-\infty,1[$ c) $]-\infty,0[$ d) $]0,+\infty[$ e) $]0,1[$

Solução: Alternativa E

Derivando f: $f'(x)=e^{1/x}+x.e^{1/x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}<0 \Leftrightarrow x\in]0,1[$

05) (EN-16) Um gerador de corrente direta tem uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms. E e r são constantes. Se R ohms é a resistência externa, a resistência total é r + R ohms e, se P é a potência, então $P=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$.

Sendo assim, qual é a resistência externa que consumirá o máximo de potência?

a) 2r b) r + 1 c) r/2 d) r e) r(r + 3)

Solução: Alternativa D

Repare que, sendo E e r constantes, P é uma função de R.

$$\frac{dP}{dR}=P'=E^2\frac{(r+R)^2-R(2r+2R)}{(r+R)^4}=E^2\frac{(r-R)}{(r+R)^3}=0 \Rightarrow R=r$$

Para $0<R<r$ tem-se $P'>0$, que significa que nesse intervalo P é crescente.

Para R> r tem-se P' < 0, que significa que nesse intervalo P é decrescente.
Logo, R = r é ponto de máximo de P.

06) (EN-08) O valor mínimo relativo da função f, de variável real x, definida por $f(x) = \frac{a^2}{\text{sen}^2 x} + \frac{b^2}{\cos^2 x}$, onde a, b $\in \Re^*$, vale.

a) $(a + 2|b|)^2$ b) $a^2 + b$ c) $2|ab|$ d) $(|a| + |b|)^2$ e) $2(a + b)^2$

Solução: Alternativa D

$$f(x) = \frac{a^2}{\text{sen}^2 x} + \frac{b^2}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \frac{a^2(-2\,\text{sen}\,x.\cos x)}{\text{sen}^4 x} + \frac{b^2(-2\cos x.(-\text{sen}\,x))}{\cos^4 x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \text{sen}\,2x\left(\frac{b^2}{\cos^4 x} - \frac{a^2}{\text{sen}^4 x}\right)$$

Assim, f'(x) = 0 ocorre em duas situações:

i) sen 2x = 0 $\Rightarrow$ $2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, que não convém, pois a função não está definida para esses arcos

ii) $\frac{b^2}{\cos^4 x} - \frac{a^2}{\text{sen}^4 x} = 0 \Rightarrow \text{tg}^4 x = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \text{tg}^2 x = \frac{|a|}{|b|} \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{|a|}{|b|} \Rightarrow$

$\frac{\text{sen}^2 x}{1 - \text{sen}^2 x} = \frac{|a|}{|b|} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{|a|}{|a| + |b|} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{|b|}{|a| + |b|}$

Para descobrir se esse ponto é de máximo ou mínimo é necessário analisar o crescimento de f(x).

$$f'(x) = \text{sen}\,2x\left(\frac{b^2\,\text{sen}^4 x - a^2\cos^4 x}{\text{sen}^4 x\cos^4 x}\right) = \frac{16\,\text{sen}\,2x}{(\text{sen}\,2x)^4}\left(b^2\,\text{sen}^4 x - a^2\cos^4 x\right) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{16}{(\text{sen}\,2x)^3}\frac{b^2}{\cos^2 x}\left(\text{tg}^4 x - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

Para $0 < \text{tg}^2 x < \frac{|a|}{|b|}$ tem-se f' < 0 (f decrescente) e para $\text{tg}^2 x > \frac{|a|}{|b|}$ tem-se f' > 0 (f crescente), implicando que o ponto x tal que $\text{tg}^2 x = \frac{|a|}{|b|}$ é um ponto de mínimo.

Portanto, o ponto de mínimo de f ocorre para:

$$f(x)_{min} = \frac{a^2}{\text{sen}^2 x} + \frac{b^2}{\cos^2 x} = \frac{a^2(|a| + |b|)}{|a|} + \frac{b^2(|a| + |b|)}{|b|} =$$

$$= |a|(|a| + |b|) + |b|(|a| + |b|) = (|a| + |b|)^2$$

07) (IME/CG-10) Determine o valor máximo de $f(x) = x^3 - 3x$, para $x \in A$, onde $A = \{x \in \text{IR} / x^4 - 20x^2 + 64 \leq 0\}$.

Solução:

O primeiro passo é determinar o conjunto A.

$x^4 - 20x^2 + 64 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 16) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 2)(x + 2)(x + 4) \leq 0 \Rightarrow$

$x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$

Derivando f duas vezes

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$

Note que para $x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$ tem-se f'(x) > 0, ou seja, f é crescente dentro de cada um dos intervalos [– 4, – 2] e [2, 4]. Desta forma, o valor máximo de f é o maior dentre f(– 2) e f(4).

Como f(– 2) = – 2 e f(4) = 52, então o valor máximo de f(x) é 52.

08) (IME/CG-23) Considere a função f(x) dada abaixo, onde $x \in \text{IR}$. Encontre e classifique seus pontos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$$

Solução:

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(1 + 3x^2) - (x^2 - x)(6x)}{(1 + 3x^2)^2} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2} = \frac{(x + 1)(3x - 1)}{(1 + 3x^2)^2}$$

Logo, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{1}{3}$

Note que antes de – 1 tem-se f' > 0 (crescente) e depois de – 1 tem-se f' < 0 (decrescente), ou seja, – 1 é ponto de máximo de f.

Por outro lado, antes de $\frac{1}{3}$ tem-se f' < 0 (decrescente) e depois de $\frac{1}{3}$ tem-se f' > 0 (crescente), ou seja, $\frac{1}{3}$ é ponto de mínimo de f.

2.10. FUNÇÕES CÔNCAVAS E CONVEXAS

2.10.1. Definição: Seja f: A→IR uma função

(1) f é uma função convexa em A se, para todos x, y ∈ A, tem-se que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(2) f é uma função côncava em A se, para todos x, y ∈ A, tem-se que

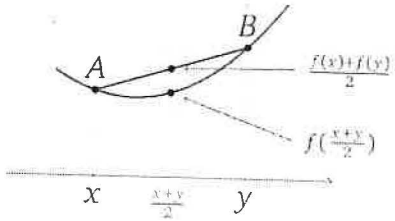
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Por exemplo, de acordo com essas definições tem-se que $f(x) = x^2$ é uma função convexa. De fato:

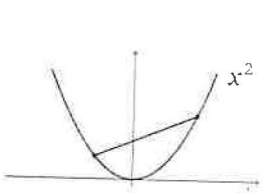
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{x^2+2xy+y^2}{4}=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{(x-y)^2}{4}\leq\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

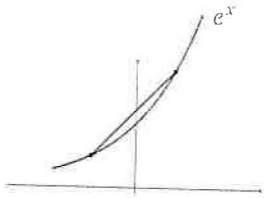
Nesse exemplo do $f(x) = x^2$ nem deu tanto trabalho assim demonstrar que a função é convexa. Entretanto, em algumas funções não é nada prático esse algebrismo a partir da definição. Vamos analisar algumas propriedades dos gráficos das funções côncavas e convexas pra verificar uma maneira, utilizando derivada, de modo que seja possível definir se uma função é côncava, convexa ou nenhuma das duas classificações.

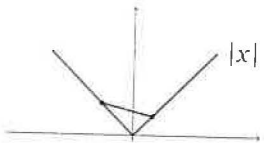
Geometricamente falando, se A e B são dois pontos do gráfico de f, a definição apresentada para função convexa é equivalente ao gráfico de f estar sempre abaixo do segmento de reta $\overline{AB}$.



Abaixo seguem alguns exemplos de funções convexas:

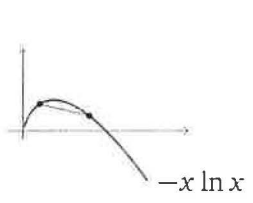


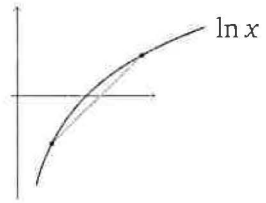


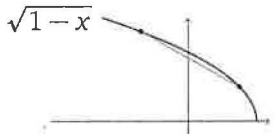


Perceba que, em todos os exemplos, a linha do gráfico sempre está abaixo do segmento de reta ligando dois pontos distintos do gráfico da função.

A seguir temos alguns exemplos de funções côncavas:

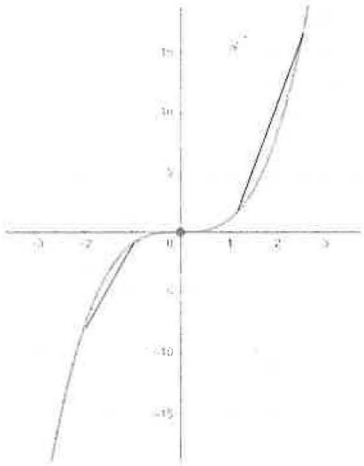






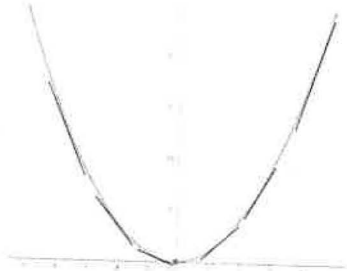
Repare que, em todos os exemplos, a linha do gráfico sempre está acima do segmento de reta obtido ligando dois pontos distintos do gráfico.

Algumas funções são convexas num intervalo e côncavas em outro intervalo, como é o caso da função f: IR→IR, $f(x) = x^3$.



Se tomarmos o domínio da função $f(x) = x^3$ como sendo $(-\infty, 0]$, f será côncava e se definirmos f em $[0, +\infty)$, f será convexa. Se o domínio for IR, $f(x) = x^3$ não é convexa nem côncava.

O objetivo agora é verificar como utilizar derivada pra definir se uma função é convexa, côncava ou nenhuma das duas. Observe o gráfico abaixo, onde está representada uma função convexa.



Foram traçadas algumas retas tangentes ao gráfico da função. Sabe-se que os coeficientes angulares dessas retas tangentes são iguais às derivadas da função no ponto de tangência. Note que, percorrendo o gráfico da função da esquerda pra direita, esses coeficientes angulares vão aumentando. Isso significa que a função derivada de f '(x) é crescente, que é equivalente a dizer que a segunda derivada de f(x) é positiva: f "(x) > 0. Apesar dessa conclusão ter sido originada de um exemplo, devido ao fato que, numa função convexa, a linha do gráfico está sempre abaixo do segmento de reta que une dois pontos distintos, sempre ocorrerá que f '(x) é crescente, implicando que f "(x) > 0.

Utilizando um raciocínio análogo, é possível justificar que numa função côncava tem-se f "(x) < 0.

É possível resumir as conclusões anteriores num teorema:

Teorema: Seja f(x) um função contínua onde existem f '(x) e f "(x) em todo ponto de um intervalo real I.

(1) Se f "(x) ≥ 0 para todo x∈I, então f é convexa em I;

(2) Se f "(x) ≤ 0 para todo x∈I, então f é côncava em I.

Por exemplo, considere a função f: IR→IR dada por f(x) = e^x. Derivando duas vezes obtém-se f '(x) = e^x e f "(x) = e^x. Como f "(x) = e^x > 0, para todo x real, então f(x) = e^x é uma função convexa.

Por outro lado, analisando a função f: IR$^+$→IR dada por $f(x)=\sqrt{x}$, segue que $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. Como x ≥ 0, para todo x do domínio de f, então se conclui que f "(x) < 0, implicando que $f(x)=\sqrt{x}$ é uma função côncava.

2.10.2. Ponto de Inflexão

Anteriormente, nesse capítulo, foi dado o exemplo da função f(x) = x^3, que é côncava no intervalo (– ∞, 0] e convexa no intervalo [0, + ∞). O nome que se dá ao ponto onde ocorre a mudança da concavidade da função é **ponto de inflexão**. No caso da função f(x) = x^3, o ponto de inflexão é x = 0.

Como a definição se uma função f é convexa ou côncava se dá pelo sinal da segunda derivada de f, o ponto de inflexão ocorre quando f "(x) muda de sinal. Vamos escrever isso em outras palavras. Considere uma função f contínua. Se num intervalo I = [a, b] existe um ponto c∈(a, b) tal que uma das situações abaixo ocorre:

(1) f "(x) < 0 para todo x∈[a, c) e f "(x) > 0 para todo x∈(c, b] ou

(2) f "(x) > 0 para todo x∈[a, c) e f "(x) < 0 para todo x∈(c, b],

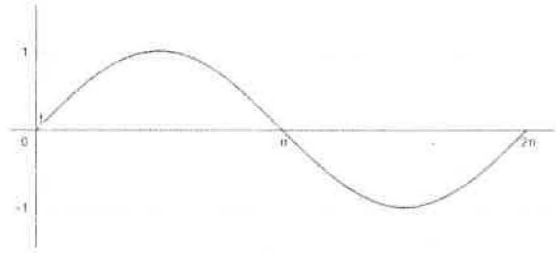
então c é ponto de inflexão de f.

Repare que, devido à inversão do sinal de f(x) em c e à continuidade de f, no ponto de inflexão c tem-se que f "(c) = 0.

Vamos agora aplicar todo esse conhecimento pra determinar o(s) ponto(s) de inflexão da função f: [0, 2π] onde f(x) = sen x. A segunda derivada de f vale:

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

Note que para x∈[0, π) tem-se f "(x) < 0, ou seja, f é côncava nesse intervalo e para x∈(π, 2π] tem-se f "(x) > 0, fazendo com que f seja convexa para esses valores de x. Como houve uma mudança de sinal de f em x = π, segue que π é ponto de inflexão de f(x) = sen x. De fato, observando gráfico de f(x) = sen x (0 ≤ x ≤ 2π) é imediata a constatação do ponto de inflexão em x = π.

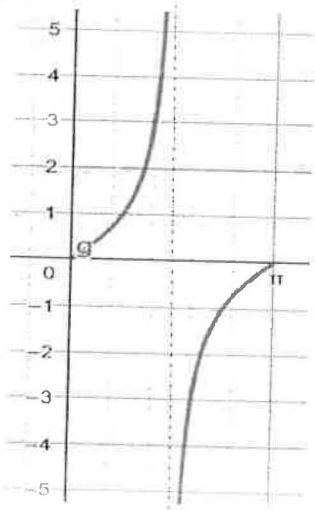


Uma função pode mudar sua concavidade sem que isso ocorra num ponto de inflexão. Isso ocorre, por exemplo, quando a concavidade muda antes e depois de uma assíntota. Por exemplo, na função $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ dada por $g(x) = tg\ x$, a função é convexa para $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ e g é côncava para $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Contudo, $\frac{\pi}{2}$ não é ponto de inflexão de g, até porque $\frac{\pi}{2}$ não pertence do domínio da função. Para que um ponto c seja ponto de inflexão de uma função g é necessário c pertença ao domínio de g e que g"(c) exista. No caso do exemplo dado, $\frac{\pi}{2}$ não satisfaz nenhuma dessas duas condições:

$$g(x) = tg\ x \Rightarrow g'(x) = sec^2 x \Rightarrow g''(x) = 2.sec^2 x.tg\ x$$

De fato, g"(x) não está definida para $x = \frac{\pi}{2}$.

A observação do gráfico de $g(x) = tg\ x$ justifica a mudança da concavidade sem que exista ponto de inflexão.



2.11. CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Nesse tópico vamos aplicar tudo que já foi abordado nesse livro pra construir o gráfico de uma função. A construção do gráfico depende da obtenção de informações sobre o comportamento da função e é composto de várias etapas, a saber:

(1) Determinação do domínio máximo da função, caso não seja fornecido;
(2) Identificação dos pontos onde o gráfico cruza os eixos coordenados;
(3) Estudo do comportamento da função quando x tende a $+\infty$ e $-\infty$;
(4) Estudo da primeira derivada da função, identificando pontos críticos, regiões de crescimento e decrescimento;
(5) Determinação dos máximos locais e globais da função, usando o teste da 1ª derivada ou o teste da 2ª derivada;
(6) Identificação dos intervalos onde a função é convexa ou côncava, bem como seus pontos de inflexão, casos existam;
(7) Cálculo, se existirem, das assíntotas verticais, horizontais ou oblíquas.
(8) Verificar se a função é par (simetria em relação ao eixo y) ou ímpar (simetria em relação à origem do plano cartesiano);
(9) Juntar todas as informações anteriores e desenhar o gráfico da função.

Vamos aplicar essas etapas pra construir o gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$:

(1) O domínio da função é $IR - \{0\}$

(2) Fazendo $y = 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 0$, que não possui raiz real $\Rightarrow$
o gráfico de f não cruza o eixo x
Como $x = 0$ não pertence do domínio de f, então o gráfico de f não cruza o eixo y

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x} = -\infty$

(4) $f'(x) = \frac{4x.x-(2x^2+1).1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2} \Rightarrow$ os pontos críticos de f são 0 e $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pelo sinal de f', se conclui que f é crescente para $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ e f é decrescente para $x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(5) se $x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f' > 0$ e se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 \Rightarrow f' < 0$: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ é mínimo local

Se $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f' < 0$ e se $x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f' > 0$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é máximo local

(6) $f''(x)=\dfrac{4x.x^3-(2x^2-1).2x}{x^4}=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f'' < 0$ para $x < 0$ e $f''<$ para $x > 0 \Rightarrow$

f é côncava para $x < 0$ e f é convexa para $x > 0$

Devido à tendência ao infinito f não tem máximo global nem mínimo global

(7) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2+1}{x}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+1}{x}=+\infty \Rightarrow$ há assíntota vertical em $x = 0$

Do resultado de (3) não há assíntota horizontal

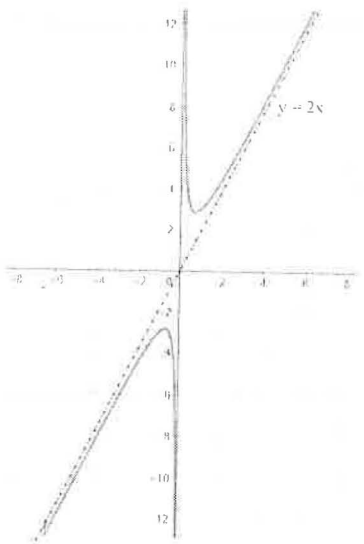
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2}=2$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{x}-2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow$

f tem uma assíntota oblíqua em $y = 2x$

(8) $f(-x)=\dfrac{2(-x)^2+1}{-x}=-\dfrac{2x^2+1}{x}=-f(x) \Rightarrow$ f é ímpar $\Rightarrow$

o gráfico de f é simétrico em relação à origem

Juntando todas as informações recolhidas sobre f é possível fazer um esboço do seu gráfico:



Pra finalizar esse tópico, vamos esboçar o gráfico da função $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$.

(1) O domínio da função é IR;

(2) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1 \Rightarrow$ o gráfico de f cruza o eixo x em 1 e -1

$f(0)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ o gráfico de f cruza o eixo y em $y=-\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=1$

(4) $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+2)-(x^2-1).2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{6x}{(x^2+2)^2} \Rightarrow 0$ é ponto crítico de f

Analisando o sinal de f', segue que f é decrescente para $x\in(-\infty, 0]$ e f é crescente para $x\in[0, +\infty)$.

(5) Pelo crescimento de f, é imediato que 0 é ponto de mínimo local de f, que também é ponto de mínimo global

Devido à tendência ao infinito, f não tem ponto de máximo global

(6) $f''(x)=\dfrac{6(x^2+2)^2-6x(4x^3+8x)}{(x^2+2)^4}=\dfrac{-6(x^2+2)(3x^2-2)}{(x^2+2)^4}=\dfrac{-6(3x^2-2)}{(x^2+2)^3} \Rightarrow$

f é côncava se $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]\cup\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}},\infty\right)$ e f é convexa se $x\in\left[-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$.

$x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ e $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ são pontos de inflexão de f

(7) Do item (3) segue que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=1$, que significa que f tem uma assíntota horizontal em $y = 1$

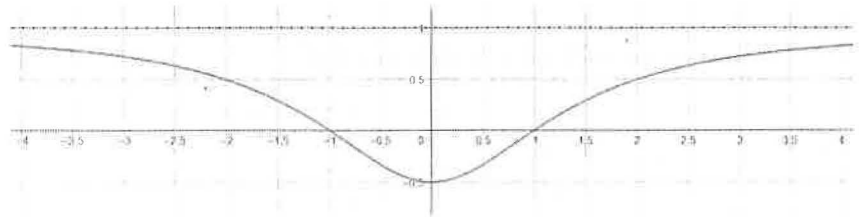
Como o denominador nunca tende a zero então não há assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x(x^2+2)}=0 \Rightarrow$ não há assíntota oblíqua

(8) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+2}=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=f(x) \Rightarrow$ f é uma função par $\Rightarrow$

o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.

Com essas informações sobre f é possível desenhar um esboço de seu gráfico:



01) (EN-21) Seja a função f definida por $f(x)=\frac{2x^2-2x+1}{2x^2}$, assinale o ponto de inflexão do gráfico da função.

a) (3/2, 5/9) b) (1, 1/2) c) (1/2, 1) d) (3/2, 5/8) e) (– 1, 5/2)

Solução: Alternativa A

$$f'(x)=\frac{(4x-2)2x^2-(2x^2-2x+1)4x}{4x^4}=\frac{8x^3-4x^2-8x^3+8x^2-4x}{4x^4}=\frac{x-1}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{1.x^3-(x-1)3x^2}{x^6}=\frac{-2x^3+3x^2}{x^6}=\frac{-2x+3}{x^4}$$

O ponto de inflexão ocorre quando é alterado o sinal de f''(x), ou seja, x = 3/2 é ponto de inflexão de f. Substituindo x = 3/2 na expressão da função obtém-se f(3/2) = 5/9. Logo, o ponto de inflexão de f é (3/2, 5/9)

02) (EN-17) Assinale a opção que representa o intervalo onde a função f, de variável real, definida por $f(x) = x.e^{2x}$, é côncava para cima.

a) [– 2, – 1[b)]– 1, + ∞[c) [– 1, + ∞[

d)]– ∞, – 1[e)]– 1/2, + ∞[

Solução: Alternativa B

$f'(x) = e^{2x} + x.e^{2x}.2 = e^{2x} + 2xe^{2x}$

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4e^{2x} + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(1 + x)$

Como $e^{2x} > 0$, $f''(x) > 0$ se $1 + x > 0$, que é equivalente a $x \in]-1, +\infty[$

03) (IME-60) Dada a função $y=\sqrt{1+x}-\frac{1}{x}$, dar:

a) O campo de definição da função.

b) Os intervalos em que é crescente.

c) A concavidade da curva no intervalo $3 \le x \le 4$.

Solução:

a) Pra determinar o domínio da função deve-se impor:

i) $1 + x \ge 0 \Rightarrow x \ge -1$

ii) $x \ne 0$

Assim, o domínio é $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$

b) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+2\sqrt{x+1}}{2x^2\sqrt{x+1}}$

Como $x^2 > 0$ e $\sqrt{x+1} \ge 0$, segue que $y' > 0$ para todo x do domínio.

Como há uma assíntota em x = 0, $\lim_{x\to 0^-} y=+\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} y=-\infty$, mesmo que $y' > 0$, a função decresce quando passa do intervalo [– 1, 0) para o intervalo (0, + ∞). Por exemplo, $f(-1) = 1 > \sqrt{2} - 1 = f(1)$.

Assim, o correto é afirmar que y é crescente para $x \in [-1, 0)$ e também crescente para $x \in (0, +\infty)$, mas não é crescente em todo o seu domínio.

c) Calculando a segunda derivada de y obtém-se $y''=-\frac{1}{4\sqrt{x+1}}-\frac{2}{x^3}$.

Como $y'' < 0$ para $x \in [3, 4]$ então a função é côncava nesse intervalo.

04) (EN-98) Podemos observar que o gráfico da função $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$:

a) cresce em]-∞, -1[∪]0, 1[.

b) tem (0, -1) como ponto de inflexão.

c) tem assíntota horizontal em y = 1 e assíntota vertical em x = 1 e x = -1.

d) tem concavidade voltada para cima para qualquer $x \in]-1, 1[$

e) está definido para todo $x \in \Re$.

Solução: Alternativa C

Vamos avaliar cada alternativa:

a) Falsa

$$y'=\frac{2x.(x^2-1)-(x^2+1).2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow$$ y é decrescente em]0, 1[

b) Falsa

$$y''=\frac{-4.(x^2-1)^2-(-4x).2.(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Analisando o sinal de y'', realmente ocorre uma mudança de sinal antes e depois de x = – 1, onde se conclui que y é convexa em (0, – ∞) e côncava em (– 1, 1), porém, x = – 1 não pertence ao domínio da função, fazendo com que x = – 1 não seja ponto de inflexão de y.

c) Verdadeira

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1}=1 \Rightarrow$ y tem assíntota horizontal em y = 1

$\lim_{x\to\pm 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$ e $\lim_{x\to\pm 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty \Rightarrow$ y tem assíntotas verticais em $x = \pm 1$

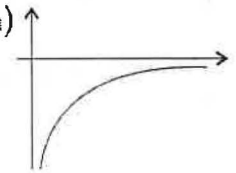
d) Falsa

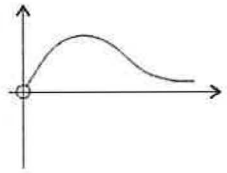
Conforme o cálculo do item b a função é côncava para $x \in (-1, 1)$

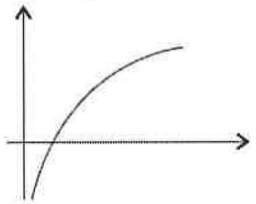
e) Falsa

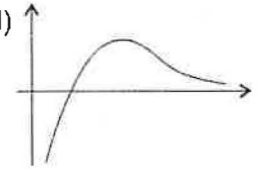
A função não está definida para $x = \pm 1$.

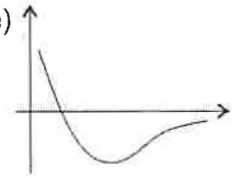
05) Qual dos seguintes gráficos representa melhor a função $f(x)=\frac{\ln x}{x}$?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Solução: Alternativa D

$D(f) = (0, +\infty)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ é raiz de f

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty \Rightarrow$ há uma assíntota vertical em y = 0

Pra calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ vamos usar a regra de L'Hopital, que será apresentada mais adiante nesse capítulo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{assíntota horizontal em } x = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x.1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow x = e \text{ é ponto crítico e } f'(x) > 0 \text{ (f crescente) pra}$$

$x \in (-\infty, e)$ e $f'(x) < 0$ (f decrescente) pra $x \in (e, +\infty)$"

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x).2x}{x^4} = \frac{x(2.\ln x - 3)}{x^4} \Rightarrow f''(e) < 0 \Rightarrow e \text{ é máximo local}$$

Além disso, f"(x) muda de sinal em $x = e^{3/2}$, que é ponto de inflexão, onde $f''(x) > 0$ (f convexa) para $x \in (0, e^{3/2})$ e $f''(x) < 0$ (f côncava) para $x \in (e^{3/2}, +\infty)$

Juntando todas as informações conclui-se que o gráfico correto é o da alternativa D.

06) (IME/CG-99) Analise a função $y(x)=\frac{x}{1+x^2}$, determinando seus pontos de máximo e mínimo e construindo seu gráfico.

Solução:

$D(f) = IR$

$x = 0$ é a única raiz

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+x} = 1 \Rightarrow$ há uma assíntota horizontal em y = 0

$$y' = \frac{1+x^2-x.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y' = 0 \text{ para } x = \pm 1$$

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)(4x+2x^3)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x-4x^3-2x^5-4x+2x^3+2x^5}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(x^2-2)}{(1+x^2)^4}$$

$y''(1) < 0 \Rightarrow 1$ é ponto de máximo

$y''(-1) > 0 \Rightarrow -1$ é ponto de mínimo

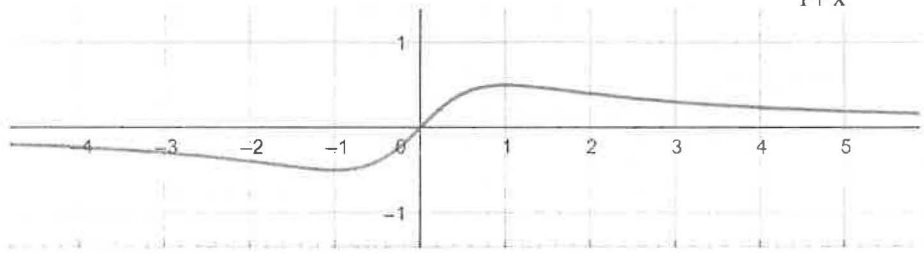
$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Como há mudança no sinal de y" nesses pontos, então $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ são pontos de inflexão de y.

$y''(x) > 0$ (função convexa) para $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

$y''(x) < 0$ (função côncava) para $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Juntando todas essas informações, tem-se o esboço do gráfico de $y(x)=\frac{x}{1+x^2}$:



2.12. TAXAS RELACIONADAS

Em determinadas situações duas ou mais variáveis, que se relacionam por uma expressão, variam em função de uma variável que não aparece na expressão. É possível derivar a expressão, em função dessa variável que não aparece na expressão, e obter uma relação entre as taxas de variação das incógnitas presentes na expressão original. Como a expressão será derivada em função de uma variável que não está presente, pelo menos de forma explícita, algumas regras de derivação, como a regra da cadeia, do produto, da razão e da função implícita, deverão ser aplicadas no processo de obtenção das taxas relacionadas.

Na maioria dos casos, essa variável que a expressão original será derivada é o tempo, obtendo assim uma outra expressão que relaciona as taxas temporais das variáveis da expressão original.

Por exemplo, na cinemática é normal escrever as equações horárias das grandezas que caracterizam o movimento de um corpo, como espaço, velocidade e aceleração. Suponha um movimento em que o produto espaço×velocidade seja constante: x.v = k. É possível obter uma expressão que relacione as taxas temporais de x e v (lembre-se que v = dx/dt e a = dv/dt):

$$\frac{d(x.v)}{dt} = \frac{d(k)}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}v + x\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v^2 + x.a = 0$$

Essa última expressão relaciona as taxas temporais das grandezas cinemáticas que caracterizam o movimento de um corpo.

Suponha agora que um retângulo tem lados de comprimentos variáveis, sendo que os lados x e y crescem a taxas temporais v_x e v_y, respectivamente. O objetivo é determinar a taxa temporal de crescimento da diagonal, num determinado instante, sendo conhecidos, para esse instante, os valores de x e y. Sabe-se que $L^2 = x^2 + y^2$ e derivando essa expressão, no tempo t, é possível relacionar as taxas temporais de crescimento de L, x e y:

$$L^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{d(L^2)}{dt} = \frac{d(x^2)}{dt} + \frac{d(y^2)}{dt} \Rightarrow 2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\,v_L = x.v_x + y.v_y \Rightarrow v_L = \frac{x.v_x + y.v_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observe os exercícios resolvidos pra entender melhor a aplicação de derivada na obtenção de taxas relacionadas.

Exercícios Resolvidos

01) Um balão esférico é enchido de ar numa taxa de 72 metros cúbicos por segundo. Determine a taxa de crescimento do raio do balão no momento em que seu volume vale 36π metros cúbicos.

Solução:

Sabe-se que $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Derivando no tempo: $\frac{dV}{dt} = \frac{4.\pi.3.R^2}{3}\frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dV}{dt}$

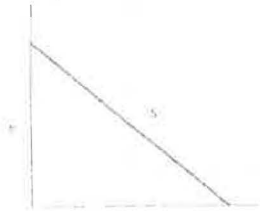
No momento em que o volume vale $36\pi\ m^3$:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow 36\pi = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R = 3\ m$$

Logo: $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4.\pi.9}72 = \frac{2}{\pi}\ m/s$

02) Uma escada de 5 m de comprimento está inicialmente na posição vertical, apoiada numa parede vertical. Em determinado momento, sua base começa a escorregar no piso horizontal, mantendo sempre sua quina superior em contato com a parede vertical. Determine a velocidade do topo da escada no momento em que sua base está com velocidade de 6 m/s e a 3 m da parede vertical.

Solução:



Pela relação de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 25$

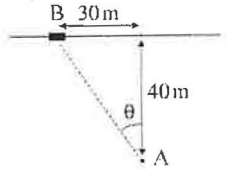
Quando x = 3 m segue que y = 4 m.

Derivando essa expressão no tempo:

$$\frac{d(x^2)}{dt} + \frac{d(y^2)}{dt} = \frac{d(25)}{dt} \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$x.v_x + y.v_y = 0 \Rightarrow 3.v_x + 4.(-6) = 0 \Rightarrow v_x = 8\ m/s$$

03) (IME/CG-04) Um blindado B percorre um caminho reto com velocidade constante de 10 m/s. Um atirador A, localizado no chão e a 40 metros do caminho, acompanha o movimento do blindado. Determine a que taxa o atirador está girando quando o blindado está a 30 m do ponto do caminho mais próximo do atirador.



Solução:

Seja x a distância, num instante qualquer, do blindado ao ponto do caminho mais próximo do atirador. Supondo que o blindado se aproxima do atirador, seu movimento pode ser descrito pela equação x = 30 – 10t, onde a situação descrita no enunciado ocorre para t = 0.

Deste modo, para t = 0: $\text{tg}\,\theta_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{4}{5}$.

Pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{x}{40} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{30-10t}{40} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{3}{4} - \frac{t}{4}$$

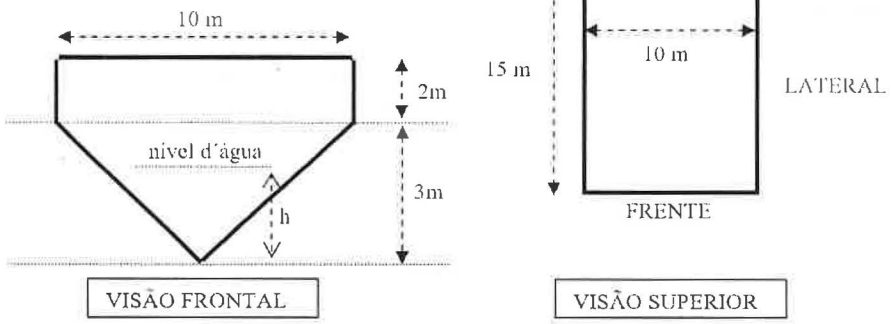
Derivando no tempo t: $\sec^2\theta.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\cos^2\theta}{4}$

Para t = 0: $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\cos^2\theta_0}{4} = -\frac{\frac{16}{25}}{4} = -\frac{4}{25}$ rad/s

04) (IME/CG-13) Um tanque tem a forma representada nos desenhos abaixo. Sua largura é 10 m e seu comprimento 15 m. Esse tanque está sendo abastecido com água a uma taxa de 0,5 m³/min. Seja h a altura do nível da água em relação à parte mais profunda do tanque. Determine, em m/min, o valor da taxa de variação de h

a) no instante em que h vale 2 m;

b) no instante em que h vale 4 m.



Solução:

A visão frontal e a visão superior do tanque não permitem precisar se o formato da parte de baixo é um prisma triangular ou uma pirâmide quadrangular.

Será considerado o formato de prisma triangular. Ficará a cargo do leitor realizar os cálculos no caso de formato piramidal.

Para $0 \le h \le 3$ m a água ocupa a parte de baixo do tanque, que foi admitida de formato prismático.

Se x é a largura do nível livre da água, por semelhança de triângulos:

$$\frac{x}{10} = \frac{h}{3} \Rightarrow x = \frac{10h}{3}$$

O volume V da água, para $0 \le h \le 3$m vale:

$$V = \frac{x.h}{2}C = \frac{\frac{10h}{3}h}{2}15 = 25h^2$$

Derivando no tempo: $\frac{dV}{dt} = 50.2h.\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 100h.\frac{dh}{dt}$

Substituindo h = 2 m: $0{,}5 = 100.2.\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0{,}0025$ m/s

b) Quando h = 4 m o nível livre da água está na parte superior do tanque, que possui formato de um paralelepípedo.

$$V = L.C.h \Rightarrow V = 150h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 150\frac{dh}{dt} \Rightarrow 0{,}5 = 150\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{300}\ \text{m/s}$$

05) O tronco de uma árvore tem formato cilíndrico cujo diâmetro cresce à razão de 1/4 cm/ano e sua altura cresce à razão de 1 m/ano. Determine a taxa de variação do volume do tronco quando o diâmetro é 3 cm e sua altura é 50 m.

Solução:

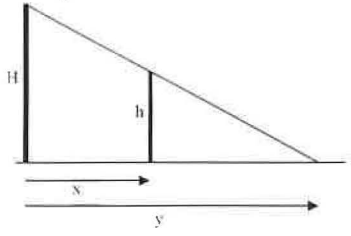
Sabe-se que o volume de um cilindro é $V = \pi r^2 h$.

Derivando no tempo: $\frac{dV}{dt} = \pi\left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right)$

Substituindo r = 3/2 cm, h = 5000 cm, $\frac{2dr}{dt} = \frac{1}{4}$ cm/ano e $\frac{dh}{dt} = 100$ cm/ano obtém-se $\frac{dhV}{dt} = 2100\pi$ cm³/ano

06) Uma luz está no alto de um poste de 5 m. Um menino de 1,6 m se afasta do poste em linha reta à razão de 1,2 m/s. A que taxa aumenta o comprimento de sua sombra?

Solução:



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{y}{y-x} = \frac{H}{h} = \frac{5}{1{,}6} \Rightarrow 8y = 25y - 25x \Rightarrow$$

$$25x = 17y \Rightarrow 25\frac{dx}{dt} = 17\frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

$$25.1{,}2 = 17\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1{,}76\ \text{m/s}$$

2.13. APLICAÇÕES DE DERIVADAS

Até agora, nesse capítulo, foram apresentadas várias aplicações da derivada, porém, à exceção da determinação do coeficiente angular da reta tangente à uma curva (aplicação em geometria analítica), as demais aplicações são todas dentro do próprio cálculo, como máximos e mínimos de funções e limites (regra de L'Hopital, ...). Entretanto, é possível aplicar derivada em outras áreas da matemática, gerando soluções alternativas.

2.13.1. Polinômios

É possível aplicar derivada em funções polinomiais, além da determinação dos máximos e mínimos da função, em situações que envolvam o estudo das raízes de uma função polinomial e também na análise da igualdade de polinômios de grau relativamente altos. Acompanha os teoremas a seguir, suas demonstrações e aplicações de derivadas em polinômios.

2.13.1.1. Teorema: Se o número complexo α é raiz de multiplicidade n do polinômio P(x) então α é raiz de multiplicidade n – 1 de P'(x).

Demonstração:

α é raiz de multiplicidade n de P(x) $\Leftrightarrow$ $P(x) = (x-\alpha)^n Q(x) \Rightarrow$

$P'(x) = n(x-\alpha)^{n-1}Q(x) + (x-\alpha)^n Q'(x) = (x-\alpha)^{n-1}[nQ(x) + (x-\alpha)Q'(x)] \Leftrightarrow$

$(x-\alpha)^{n-1} \mid P'(x) \Leftrightarrow$ α é raiz de multiplicidade n – 1 de P'(x)

2.13.1.2. Teorema: Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é raiz do polinômio P(x) e α é raiz de multiplicidade n – 1 de P'(x), então α é raiz de multiplicidade n de P(x).

Demonstração:

α é raiz de multiplicidade n – 1 de P'(x) $\Rightarrow$ $P'(x) = (x-\alpha)^{n-1}Q_1(x) \Rightarrow$

$P(x) = (x-\alpha)^n Q_2(x) + k$, onde $k \in \mathbb{C}$ (1)

Como α é raiz de P(x) então $P(\alpha) = 0$

Substituindo $x = \alpha$ em (1) segue que $k = 0 \Rightarrow (x-\alpha)^n \mid P(x) \Rightarrow$

α é raiz de multiplicidade n de P(x)

Por exemplo, é possível aplicar esse último teorema de modo a provar que o polinômio $p(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ é divisível por $(x-1)^2$, para todo n inteiro positivo. Inicialmente, observe que 1 é raiz de p(x).

De fato: $p(1) = 1 - n + n - 1 = 0$.

Derivando p(x): $p'(x) = 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^n + n(n-1)x^{n-2}$

Substituindo $x = 1$ em p'(x): $p'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0 \Rightarrow$

1 é raiz de p'(x) $\Rightarrow$ 1 é raiz dupla de p(x) $\Rightarrow$ $(x-1)^2 \mid p(x)$

2.13.1.3. Teorema: Se P(x) é um polinômio de grau $n > 1$ de modo que os números reais $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ são as raízes de P(x), então P'(x) tem n – 1 raízes reais $\beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_{n-1}$ onde $\beta_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta_2 \in (\alpha_2, \alpha_3)$, ..., $\beta_{n-1} \in (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$.

Demonstração:

$P(x) = k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$

Pela regra da derivada do produto de duas funções:

$P'(x) = k[(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_{n-1})]$

Note que: $P'(\alpha_1)P'(\alpha_{i+1}) < 0$

Assim, pelo teorema de Bolzano, existe uma raiz de P'(x) no intervalo (α_i, α_{i+1})

2.13.1.4. Teorema: Se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são as n raízes complexas de P(x), de grau n, então $\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + ... + \frac{1}{x-\alpha_n}$.

Demonstração:

De acordo com a demonstração do teorema anterior, se $P(x) = k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$, pela regra da derivada do produto de duas funções:

$P'(x) = k[(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_{n-1})]$

Dividindo P'(x) por P(x) obtém-se $\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + ... + \frac{1}{x-\alpha_n}$.

É possível aplicar esse último teorema pra calcular o valor da expressão $\frac{1}{a-2} + \frac{1}{b-2} + \frac{1}{c-2}$, onde a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$.

Escrevendo na forma fatorada $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = (x-a)(x-b)(x-c)$.

Derivando P(x) obtém-se $P'(x) = 3x^2 - 6x + 4$. Pelo teorema anterior:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}.$$

Substituindo $x = 2$:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} = \frac{P'(2)}{P(2)} = \frac{3.2^2 - 6.2 + 4}{2^3 - 3.2^2 + 4.2 - 6} = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a-2} + \frac{1}{b-2} + \frac{1}{c-2} = 2$$

Também é possível aplicar derivadas em problemas de polinômios idênticos, geralmente em problemas que envolvem potências de polinômios, onde o cálculo tradicional se torna muito extenso. Por exemplo, considere a situação de determinar o coeficiente de x^2 no desenvolvimento da expressão $(1 + 3x + 2x^2)^{10}$. É possível resolver essa questão multiplicando $1 + 3x + 2x^2$ vinte vezes, porém é um cálculo que dispensa muito tempo. Utilizando derivada é bem mais rápido.Sabe-se que esse polinômio, após desenvolvido, terá grau 20:

$(1 + 3x + 2x^2)^{10} = a_{20}x^{20} + a_{19}x^{19} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

A estratégia é ir derivando os dois lados da igualdade polinomial, até que o termo independente de x, no membro direito da igualdade, seja a_2. Note que será necessário derivar duas vezes. Derivando a primeira vez:

$$[(1 + 3x + 2x^2)^{10}]' = (a_{20}x^{20} + a_{19}x^{19} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0)' \Rightarrow$$
$$10(1 + 3x + 2x^2)^9(3 + 4x) = 20a_{20}x^{19} + 19a_{19}x^{18} + ... + 2a_2x + a_1$$

Derivando mais uma vez:

$10[9(1 + 3x + 2x^2)^8(3 + 4x)^2 + (1 + 3x + 2x^2)^9.4] = 380a_{20}x^{18} + 342a_{19}x^{18} + ... + 2a_2$

Substituindo x = 0 nessa última expressão:

$10(9.1^8.3^2 + 1^9.4) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = 425$

2.13.2. Somatórios

Uma conhecida aplicação de derivadas é em somatórios, principalmente se os coeficientes do somatório forem números consecutivos ou formarem uma progressão aritmética de 2ª, 3ª, ... ordem. O bizu é enxergar que o somatório solicitado pode ser obtido derivando, em alguns casos mais de uma vez, alguma expressão de somatório com resultado conhecido.

Vamos aplicar derivada para calcular o somatório $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$, onde $-1 < x < 1$. Considere a conhecida fórmula, para $-1 < x < 1$, da soma da PG infinita $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{1}{1-x}$. Derivando os dois membros dessa igualdade:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Rightarrow 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... = -\frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Também é possível aplicar derivada em somatórios cuja expressão não apresente a variável x. Um exemplo é calcular o valor do seguinte somatório:

$$S = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n}$$

Do desenvolvimento em binômio de Newton sabe-se que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + ... + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

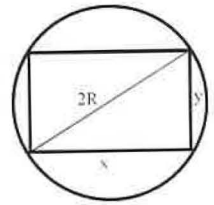
Derivando os dois membros em x:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + ... + n\binom{n}{n}x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$$

Substituindo x = 1: $S = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n} = n.2^{n-1}$

2.13.3. Otimização em Geometria

Uma aplicação muito comum da derivada é a otimização de características geométricas. Por exemplo, é possível determinar a área máxima de determinada figura que respeite certas condições, como estar contida numa circunferência ou a distância mínima de um ponto de uma curva a uma determinada reta. Como o leitor já deve ter percebido, na prática é uma aplicação de máximos e mínimos de uma função contínua, apenas agora aplicada a propriedades geométricas, como ângulo, comprimento, área e volume. Como não há exatamente uma teoria nova a ser desenvolvida, vamos apresentar algumas aplicações:



(a) Como determinar a área máxima de um retângulo inscrito numa circunferência de raio R?

Suponha que as dimensões do retângulo sejam x e y. Pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

A área do retângulo é dada por:

$S = x.y \Rightarrow S = x\sqrt{4R^2 - x^2} \Rightarrow S = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$

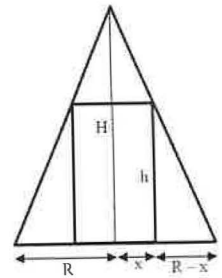
Deste modo, a área será máxima quando $f(x) = 4R^2x^2 - x^4$ for máximo.

$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = \sqrt{2}R$

$f''(x) = 8R^2 - 12x^2 \Rightarrow f''(\sqrt{2}R) = -16R^2 < 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}R$ é ponto de máximo

Assim, a área máxima do retângulo vale:

$$S_{max} = \sqrt{4R^2(\sqrt{2}R)^2 - (\sqrt{2}R)^4} = \sqrt{8R^4 - 4R^4} = 2R^2$$



(b) Qual é o volume máximo de um cilindro inscrito num cone reto de altura H e raio da base R?

A figura ao lado representa uma seção meridiana dos sólidos.

Por semelhança de triângulos: $\frac{h}{H} = \frac{R-x}{R} \Rightarrow h = \frac{(R-x)H}{R}$

O volume do cilindro vale: $V = \pi x^2 h = \frac{\pi H(x^2R - x^3)}{R}$

Assim, V será máximo quando $f(x) = x^2R - x^3$ for máximo.

$f'(x) = 2xR - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2R}{3}$

$f''(x) = 2R - 6x \Rightarrow f''\left(\frac{2R}{3}\right) = -2R < 0 \Rightarrow x = \frac{2R}{3}$ é ponto de máximo

A altura pro volume máximo do cilindro é igual a $h = \frac{(R-x)H}{R} = \frac{H}{3}$

Logo, o volume máximo vale $V = \pi x^2 h = \frac{4\pi R^3}{9}$

(c) Qual é o ponto da hipérbole equilátera $y = \frac{1}{x}$ que está mais próximo da origem?

Suponha que (x, y) são as coordenadas de um ponto qualquer da hipérbole.
A distância desse ponto até a origem do plano cartesiano vale:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

Deste modo, d será máximo no ponto x tal que $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ é máximo.

$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} \Rightarrow f''(1) = f''(0-1) = 8 > 0 \Rightarrow 1$ e -1 são pontos de mínimo

Logo, há dois pontos da hipérbole que estão mais próximos da origem do plano cartesiano, a saber: (1, 1) e (– 1, – 1)

Acompanhe os exercícios resolvidos pra entender melhor as aplicações de derivadas em outras áreas da matemática.

Exercícios Resolvidos

01) (EN-98) A relação entre os coeficientes b e c para que a equação $x^3 + bx + c = 0$ possua duas raízes iguais é:

a) $4b^3 + 27c^2 = 0$ b) $b^3 + c^2 = 0$
c) $2b^3 + 3c^2 = 0$ d) $b^3 + c^2 = 0$
e) $3b = c$

Solução: Alternativa A

Derivando: $p'(x) = 3x^2 + b$

Suponha que r seja raiz dupla de $p(x) = x^3 + bx + c$.

Desta forma, r é raiz de p'(x), ou seja, $p'(r) = 0 \Rightarrow 3r^2 + b = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\frac{b}{3}}$

$$p(r) = 0 \Rightarrow \left(\pm\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3 + b\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{3}}\right) + c = 0 \overset{b<0}{\Rightarrow} \pm\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{b^3}{3}} \mp \sqrt{-\frac{b^3}{3}} + c = 0 \Rightarrow$$

$$\pm\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{b^3}{3}} = c \overset{\text{elevando ao quadrado}}{\Rightarrow} -\frac{4}{27}b^3 = c^2 \Rightarrow 4b^3 + 27c^2 = 0$$

02) Calcule $S = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} 5^k$.

Solução:

Considere $f(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$.

Derivando: $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + 4\binom{n}{4}x^3 + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$

Multiplicando por x:

$xf'(x) = nx(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1}x + 2\binom{n}{2}x^2 + 3\binom{n}{3}x^3 + 4\binom{n}{4}x^4 + \ldots + n\binom{n}{n}x^n$

Derivando mais uma vez:

$f'(x) + xf''(x) = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} =$

$= 1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2}x + 3^2\binom{n}{3}x^2 + 4^2\binom{n}{4}x^3 + \ldots + n^2\binom{n}{n}x^{n-1}$

Substituindo x = 5: $n.6^{n-1} + n(n-1).5.6^{n-2} = \frac{S}{5} \Rightarrow S = 5.n.6^{n-2}.(6 + 5n - 5) \Rightarrow$

$S = 5.n.(5n + 1).6^{n-2}$

03) (ITA-10) Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$ $0 \le \alpha \le \beta$, maximizam a soma sen α + sen β, então α é igual a.

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{5}$ d) $\frac{5\pi}{8}$ e) $\frac{7\pi}{12}$

Solução: Alternativa B

Seja $f(\alpha) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right)$

$f'(\alpha) = \cos\alpha - \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right)$

i) $\alpha = \frac{4\pi}{3} - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$

ii) $-\alpha = \frac{4\pi}{3} - \alpha \Rightarrow 0 = \frac{4\pi}{3}$ (absurdo)

$f''(\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right) \Rightarrow f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ é ponto de máximo de f

04) (ITA-16) Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

Solução:

Equação da divisão: $(1 + x + x^2)^{40} = (1 + x)^3 q(x) + ax^2 + bx + c$

Fazendo $x = -1$: $a - b + c = 1$

Derivando: $40(1 + x + x^2)^{39}(2x + 1) = 3(1 + x)^2 q(x) + (1 + x)^3 q'(x) + 2ax + b$

Fazendo $x = -1$: $-2a + b = -40$

Derivando novamente: $40.39(1 + x + x^2)^{38}(2x + 1)^2 + 40(1 + x + x^2)^{39}.2 =$
$= 6(1 + x)q(x) + 3(1 + x)^2 q'(x) + 3(1 + x)^2 q'(x) + (1 + x)^3 q''(x) + 2a$

Aplicando $x = -1$ obtém-se $a = 820 \Rightarrow b = 2a - 40 = 1600$

Finalmente: $c = 1 - a + b = 1 - 820 + 1600 = 781$

05) (IME-08) Considere todos os pontos de coordenadas (x, y) que pertençam à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$. Determine o maior valor possível de $\frac{y}{x}$.

Solução:

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Rightarrow \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1$$

Parametrizando esta circunferência temos que:

$$x = 2.\cos\theta + 3 \text{ e } y = 2.\text{sen}\,\theta + 3 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2.\text{sen}\,\theta + 3}{2.\cos\theta + 3}$$

Derivando em θ: $\frac{d(y/x)}{d\theta} = \frac{(2.\cos\theta)(2.\cos\theta + 3) - (-2\,\text{sen}\,\theta)(2.\text{sen}\,\theta + 3)}{(2.\cos\theta + 3)^2} \Rightarrow$

$$\frac{d(y/x)}{d\theta} = \frac{6.\cos\theta + 6.\text{sen}\,\theta + 4}{(2.\cos\theta + 3)^2}$$

De modo que y/x seja máximo a derivada acima tem que valer zero:

$$6.\cos\theta + 6.\text{sen}\,\theta + 4 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta + \cos\theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2\theta + 2.\text{sen}\,\theta.\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{9} \Rightarrow \text{sen}\,2\theta = -\frac{5}{9} \Rightarrow \cos 2\theta = \pm\frac{2\sqrt{14}}{9} \Rightarrow$$

$$\text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{9 \mp 2\sqrt{14}}{18}} \text{ e } \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{18}}$$

De modo que y/x seja máximo deve-se minimizar o denominador:

$$\text{Logo: } \left(\frac{y}{x}\right)_{max} = \frac{2\sqrt{\frac{9-2\sqrt{14}}{18}} + 3}{-2\sqrt{\frac{9+2\sqrt{14}}{18}} + 3} = \frac{9 + 2\sqrt{14}}{5}$$

06) Qual é maior, e^π ou π^e?

Solução:

Considere a função $f(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x.1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e \text{ é ponto crítico de f}$$

Além disso, $f'(x) > 0$, ou seja f crescente, pra $x \in (-\infty, e)$ e $f'(x) < 0$, que significa f decrescente, pra $x \in (e, +\infty)$

Assim, conclui-se que $x = e$ é ponto máximo local de f e daí:

$$f(e) > f(\pi) \Rightarrow \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi.\ln e > e.\ln \pi \Rightarrow \ln e^\pi > \ln \pi^e \Rightarrow e^\pi > \pi^e$$

07) (Olimpíada Iberoamericana-90) Seja f(x) um polinômio de grau 3 com coeficientes racionais. Provar que se o gráfico de f é tangente ao eixo x, então f(x) tem suas 3 raízes racionais.

Solução:

Se um polinômio f de grau 3 tangencia o eixo x então existe t racional de modo que t é raiz dupla de f: $f(x) = k(x - t)^2(x - s)$, onde k, t e s são racionais

Sabe-se que se t é raiz dupla de f então t é raiz de f': $f'(x) = k(x - t)(x - u)$, $u \in \mathbb{Q}$

Dividindo f por f':

$f(x) = f'(x).q(x) + r(x) \Rightarrow k(x - t)^2(x - s) = k(x - t)(x - u)(x - v) + ax + b$,
onde v, a e b são racionais

Substituindo $x = t$: $0 = at + b \Rightarrow t = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Como os coeficientes são racionais, então a soma das raízes é racional:

$2t + s \in \mathbb{Q} \Rightarrow s \in \mathbb{Q}$

08) Deseja-se fabricar um recipiente cilíndrico de volume igual a 27π m³. Em ambas as tampas, será utilizado um material que custa R$ 4,00 o metro quadrado e no restante, isto é, na superfície lateral, um material que custa R$ 1,00 o metro quadrado. Para que o custo seja o menor possível, a área da superfície lateral deve ser igual a

a) 14π m² b) 36π m² c) 54π m² d) 72π m² e) 90π m²

Solução: Alternativa B

Sejam r o raio da base do cilindro e h sua altura.

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 27\pi = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{27}{r^2}$$

O custo de produção do recipiente:

$$C = 4.2\pi r^2 + 1.2\pi rh = 8\pi r^2 + 2\pi r\frac{27}{r^2} = 2\pi\left(4r^2 + \frac{27}{r}\right)$$

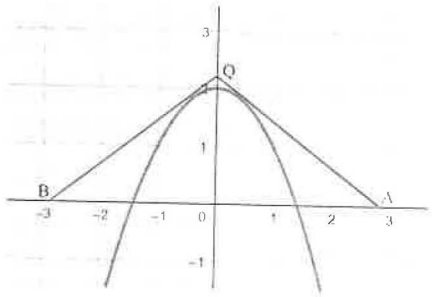
$C' = 2\pi\left(8r - \frac{27}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow 8r = \frac{27}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 12$

$C'' = 2\pi\left(8 + \frac{27}{2r^3}\right) \Rightarrow C''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$ é ponto de mínimo de C

$S_L = 2\pi rh = 36\pi\ m^2$

09) (IME-67) De um ponto $Q(0, y_1)$ traçam-se as tangentes à curva de equação $y = 2 - x^2$, que interceptam a reta $y = 0$ nos pontos A e B. Pede-se determinar y_1 de modo que a área do triângulo QAB seja mínima.

Solução:



Pela simetria, pode-se afirmar que A(a, 0) e B(– a, 0). Se r é uma reta que passa pelo ponto $Q(0, y_1) \Rightarrow r: y - y_1 = mx$

Interseção entre r e a parábola:

$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = y_1 + mx \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 = y_1 + mx \Rightarrow$

$x^2 + mx + y_1 - 2 = 0$

$\Delta = m^2 - 4(y_1 - 2) = m^2 - 4y_1 + 8$

Como a reta é tangente à parábola:

$\Delta = 0 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{y_1 - 2} \Rightarrow m_{AQ} = -2\sqrt{y_1 - 2}$ e $m_{BQ} = 2\sqrt{y_1 - 2}$

Note que: $m_{BQ} = 2\sqrt{y_1 - 2} = \frac{y_1}{a} \Rightarrow a = \frac{y_1}{2\sqrt{y_1 - 2}} \Rightarrow S_{QAB} = \frac{2a.y_1}{2} = \frac{y_1^2}{2\sqrt{y_1 - 2}}$

$S'_{QAB} = \frac{2y_1.2\sqrt{y_1 - 2} - y_1^2}{4(y_1 - 2)} = 0 \Rightarrow 4y_1\sqrt{y_1 - 2} = y_1^2 \Rightarrow$

$4(y_1 - 2) = y_1 \Rightarrow 3y_1 = 8 \Rightarrow y_1 = \frac{8}{3}$

É possível provar que 8/3 é ponto de mínimo analisando o sinal de segunda derivada, porém essa conclusão é imediata pelo fato de a área assumir um valor mínimo e não assumir valor máximo (quando $y_1 \to 2^+$ tem-se que $S_{QAB} \to +\infty$).

10) (IME-70) De um disco de raio $R = 1/2\pi$ retire um setor cujo arco é x. Com o restante do disco forme um cone. Calcule o valor de x para que o volume do cone seja máximo.

a) $1 - \sqrt{2/3}$ b) 4 c) $1 + \sqrt{2/3}$

d) $\pi/6$ e) $2\pi + 2$ e) nda

Solução: Alternativa A

Como o comprimento da circunferência é $C = 2\pi R = 1$, tirando um arco de comprimento x o comprimento da circunferência da base do cone é $1 - x$.

Se r é o raio da base do cone: $2\pi r = 1 - x \Rightarrow r = \frac{1 - x}{2\pi}$

A geratriz do cone será igual ao raio do setor circular: $g = R = 1/2\pi$

Assim, a altura do cone vale: $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} = h^2 + \frac{(1-x)^2}{4\pi^2} \Rightarrow$

$h^2 = \frac{1 - (1 - 2x + x^2)}{4\pi^2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{2\pi}$

$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{2x - x^2}}{2\pi} = \frac{(1 - 2x + x^2)\sqrt{2x - x^2}}{24\pi^2}$

$V' = \frac{(2x - 2)\sqrt{2x - x^2} + (1 - 2x + x^2)\frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}}{24\pi^2} = 0 \Rightarrow$

$(1 - x)[-2(2x - x^2) + 1 - 2x + x^2] = 0 \Rightarrow -4x + 2x^2 + 1 - 2x + x^2 = 0 \Rightarrow$

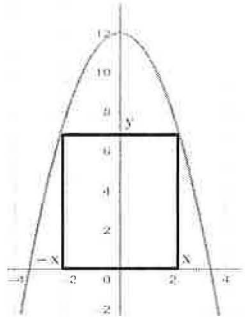
$3x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

Como $x < 1$, a única possibilidade é $x = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$

11) (EN-99) Na confecção da raia de tiro para navios da Marinha, verificou-se que o alvo ideal seria um retângulo. As dimensões de um retângulo de área máxima com base no eixo x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$ pertencem ao intervalo:

a) [2, 5] b) [0, 3] c)]3, 7] d) [4, 9[e) [0, 6[

Solução: Alternativa D



De acordo com a figura, a área do retângulo vale:

$S = 2xy = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$

$S' = 24 - 6x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 8$

Assim, as dimensões do retângulo de maior área são 4×8.

O único intervalo que inclui 4 e 8 é o da alternativa D.

2.14. REGRA DE L'HOPITAL

No capítulo de limites foram apresentadas várias técnicas pro cálculo de limites indeterminados do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Entretanto, alguns limites não podem ser calculados usando apenas as técnicas apresentadas no capítulo anterior, principalmente os que envolvem funções de categorias diferentes, tais como $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

Para conseguir calcular esses tipos de limites vamos lançar mão de uma regra que envolve derivadas.

Regra de L'Hopital

Regra 1: Se f e g são funções deriváveis em x = a, tais que f(a) = g(a) = 0 e $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ existe, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Regra 2: Sejam f e g funções deriváveis num intervalo I que contenha x = a, com $g(x)\neq 0$ e $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in I$. Suponha que ocorra

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \text{ e } \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty.$$

Se $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é $\pm\infty$, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Observações:

(1) A regra 2 é válida se trocarmos $x\to a$ por $x\to a^+$ ou $x\to a^-$ ou $x\to\pm\infty$.

(2) Caso $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ resulte numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e as demais condições de aplicação sejam satisfeitas, é possível aplicar novamente a regra de L'Hopital e obter $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(a)}{g''(a)}$, caso $\frac{f''(a)}{g''(a)}$ exista. Esse processo pode seguir pra derivadas de ordem superior, até obter uma derivada em que $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$ exista ou seja igual a $\pm\infty$.

Demonstração:

Vamos apresentar aqui apenas a demonstração da regra 1. A demonstração da regra 2 necessita de conceitos que fogem do objetivo desse livro, que são os concursos militares.

Como f(a) = g(a) = 0: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

Por exemplo, no capítulo de limites vou necessário usar o teorema do valor intermediário pra demonstrar o limite fundamental trigonométrico: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$. Usando a regra de L'Hopital, a demonstração desse resultado é extremamente simples. Inicialmente deve-se verificar que as condições da aplicação da regra são satisfeitas. De fato, fazendo f(x) = sen x e g(x) = x, tem-se f e g deriváveis em x = 0 (note que f'(x) = cos x e g'(x) = 1), f(0) = g(0) = 0 e $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ existe. Portanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{\cos 0}{1}=1$$

Mas esse não é exatamente o tipo de limite que necessite da aplicação da regra de L'Hopital, até porque é um dos limites fundamentais. A regra de L'Hopital é especialmente útil pra resolver limites do tipo $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$. Inicialmente, repare que as condições de aplicação da regra de L'Hopital são satisfeitas. Deste modo, fazendo $f(x)=e^x-1$ e g(x) = sen x, tem-se que $f'(x)=e^x$ e g'(x) = cos x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{e^0}{\cos 0}=1$$

Pra finalizar esse tópico, vamos aplicar a regra de L'Hopital para calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3-4x^2+6x-1}$. Note que há uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Suponha que $f(x)=e^x$ e $g(x)=x^3-4x^2+6x-1$. Repare que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ainda gera uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ e satisfaz as condições para continuar a aplicar a regra de L'Hopital. Na verdade, a indeterminação só desaparece na 3ª derivada de f e g, onde $f'''(x)=e^x$ e g'''(x) = 6. Portanto, podemos afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3-4x^2+6x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

A regra de L'Hopital é uma ferramenta muito poderosa na determinação de limites que não podem ser calculados pelos meios tradicionais. Acompanhe a seguir os exercícios resolvidos pra entender melhor como aplicar essa regra.

01) Calcule o valor de $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$.

Solução:

Temos claramente uma indeterminação do tipo $\frac{-\infty}{+\infty}$ e todas as condições para a aplicação da regra de L'Hopital são satisfeitas. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sec^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x}$$

Agora há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando novamente a regra de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1} = 0$$

02) O valor de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(3x^2)}{\ln(1+x^2)}$ é

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) $+\infty$

Solução: Alternativa D

Como há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, é possível aplicar a regra de L'Hopital:

Fazendo $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\, 3x^2$ e $g(x) = \ln(1+x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(3x^2)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x}{1+9x^4}}{\frac{2x}{(1+x^2)^2}} = \frac{6}{2} = 3$$

03) (EFOMM-95) O valor de $\lim_{x\to 0} \frac{-2+2\cos^2 x}{x^3-x^2}$ é:

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Solução: Alternativa E

Claramente há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Fazendo $f(x) = -2 + 2\cos^2 x$ e $g(x) = x^3 - x^2$, pode-se aplicar a regra de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2+2\cos^2 x}{x^3-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos x.\operatorname{sen} x}{3x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} 2x}{3x^2-2x}$$

Mais uma vez apareceu uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hopital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} 2x}{3x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-2\operatorname{sen} 2x)'}{(3x^2-2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos 2x}{6x-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

04) Calcule $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$.

Solução:

Das propriedades de exponencial se sabe que $x = e^{\ln x}$. Aplicando no limite:

$$x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = e^{\frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}}$$

Usando a continuidade da função exponencial:

$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}}$, onde há uma indeterminação $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Fazendo $f(x) = \ln 2.\ln x$ e $g(x) = 1 + \ln x$, pela regra de L'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2.\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \ln 2$$

Assim: $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}} = e^{\ln 2} = 2$

05) (IME/CG-05) A função g(x) possui derivada g'(x) para todo x real e satisfaz as seguintes equações:
g'(0) = 2
$g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y)$ para quaisquer x e y reais.
a) Mostre que $g(2x) = 2e^x g(x)$ e encontre uma fórmula similar para g(3x).
b) Generalize o resultado do item anterior, encontrando uma fórmula para g(nx) em função de g(x), válida para todo inteiro positivo n. Demonstre essa fórmula por indução matemática.

c) Mostre que g(0) = 0 e calcule $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h}$.

Solução:
a) $y = x \Rightarrow g(2x) = 2e^x g(x)$
$y = 2x \Rightarrow g(3x) = e^{2x} g(x) + e^x g(2x) = e^{2x} g(x) + 2e^{2x} g(x) = 3e^{2x} g(x)$
b) Vamos provar, por indução, que $g(nx) = ne^{(n-1)x} g(x)$
$y = nx \Rightarrow g((n+1)x) = e^{nx} g(x) + e^x ne^{(n-1)x} g(x) = (n+1)e^{nx} g(x)$
c) Fazendo x = y = 0: $g(0) = g(0) + g(0) \Rightarrow g(0) = 0$
Perceba que $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h}$ é o tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hopital: $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g'(h)}{1} = g'(0) = 2$

06) (IME/CG-23) Determine o valor do seguinte limite $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x + 4/x}{e^x + 5/x} \right)$.

Solução:
O limite proposto é o tipo 0/0 e satisfaz as condições para a aplicação da regra de L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 4/x}{e^x + 5/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x.e^x + 4}{x.e^x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x.e^x + 4)'}{(x.e^x + 5)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x.e^x}{e^x + x.e^x} = 1$$

Exercícios Propostos

01) (EN-98) A derivada da função f(x) = arc tg(1/x) é:
a) $\frac{x^2}{x^2+1}$ b) $\frac{1}{1+x^2}$ c) $\frac{-1}{1+x^2}$ d) $\frac{-1}{x^2(1+x^2)}$ e) $\frac{1}{x}$

02) (EFOMM-94) A derivada primeira da função $f(x) = \frac{e^{3x}}{9} \cdot (3\operatorname{sen} x - \cos x)$ tem a seguinte expressão:
(A) $e^{3x} \cdot (\cos x + \operatorname{sen} x)$ (B) $\frac{e^{3x} \cdot \cos x}{3}$ (C) $\frac{4}{3} \cdot e^{3x} \operatorname{sen} x$
(D) $\frac{10 \cdot e^{3x} \cdot \operatorname{sen} x}{9}$ (E) $\frac{e^{3x}}{3} \cdot \operatorname{sen} x$

03) (EN-89) Se $f(x) = tg^3 2x$ podemos afirmar que f'(π/6) é igual a:
a) 0 b) 72 c) 144 d) 96 e) 24

04) (EN-90) A derivada da função f(x) = x / e^x é:
a) f'(x) = 1/ e^x b) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ c) $f'(x) = \frac{x-1}{e^x}$
d) $f'(x) = \frac{x}{e^{2x}}$ e) $f'(x) = x + 1/e^{2x}$

05) (EFOMM-95) As equações das retas tangentes à curva $y - 2x + \frac{1}{x} = 0$ que são paralelas à reta $y - 3x + 1 = 0$ são:
(A) $y + 3x + 2 = 0$ e $y - 3x - 2 = 0$ (B) $y - 3x + 2 = 0$ e $y - 3x - 2 = 0$
(C) $y - 3x + 2 = 0$ e $y + 3x - 2 = 0$ (D) $y + 3x + 2 = 0$ e $y + 3x - 2 = 0$
(E) $y - 3x - 2 = 0$ e $y + 3x - 2 = 0$

06) (EFOMM-94) A razão da função $f(x) = a^{\frac{x}{2}}$ para a sua derivada de ordem **n** é:
(A) $2^n \cdot \ln a$ (B) $2^{-n} \cdot \ln a^n$ (C) $2^n \cdot (\ln a)^{-n}$
(D) $2^{n-1} \cdot \ln a$ (E) $2^n \cdot \ln(a \cdot n)$

07) (EN-98) Considere r a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(1, f(1))$. Sejam $f(1) = 3$ e $f''(1) = 2$. Se r intercepta o gráfico da função $g(x) = x^2 - 3x + 7$ nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) então os valores de y_1 e y_2 são respectivamente:

a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 5 d) 5 e 7 e) 7 e 9

08) (EN-98) Seja $y = x^3 - 3x + 5$, onde $x = g(t)$, $g'(2) = 3$ e $g(2) = 4$. A derivada de y no ponto $t = 2$ é:

a) 9 b) 27 c) 45 d) 90 e) 135

09) (EFOMM-96) A derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x}{\sec x - \cos x}}$, calculada no ponto $x = -\frac{\pi}{3}$ resulta:

(A) 1 (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (E) $-\frac{4}{3}$

10) (EN-00) A reta tangente à curva de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ é dada por

(A) $20y + 9x = 75$ (B) $5y - 5x = 3$ (C) $5y + 15x = 51$
(D) $20y - 9x = 45$ (E) $y - 5x = 75$

11) (EN-01) A derivada de 2ª ordem da função real $f(x) = \sqrt{x}\ \ln x$ em $x = 1$ é

(A) $\frac{-3}{4}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

12) (EFOMM-19) Considere a função $f(x) = 1 + \cos(2\sqrt{x})$. Calcule a derivada de f(x) em relação à x, ou seja, $\frac{df(x)}{dx}$.

a) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{-\cos(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

c) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{-\operatorname{sen}(2x^{0,5})}{\sqrt{x}}$ d) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{\cos(2x^{0,5})}{\sqrt{x}}$

e) $\frac{df(x)}{dx} = 1 - 2\sqrt{x}\operatorname{sen}(2\sqrt{x})$

13) (EN-02) Sejam f e g funções definidas em IR e deriváveis em $x = 0$ tais que $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$, $g(0) = 1$ e $g'(0) = -1$. Então $\left(\frac{2f+g}{f-g}\right)'(0)$ é igual a:

a) 21/6 b) 7/5 c) –21/4 d) –21/2

14) (EFOMM-96) Sabendo que $f(x) = (x^2 - 1)^2$ e $g(x) = x \cdot \ln x$, podemos afirmar que:

I. $f'(1) = 0$
II. $g'(2) = \ln 2$
III. $f'(1) = g''(\frac{1}{2}) = -2$
IV. $f'(1) = f''(-1)$
V. $g'(2) = g''(2)$

(A) Somente a I é correta. (B) I, II e IV são corretas.
(C) III e V são corretas. (D) I, III e IV são corretas.
(E) Todas são corretas.

15) (EFOMM-19) Considere a função real $f(x) = \operatorname{sen}(2x^2) + \cos(2\sqrt{x})$. Calcule a derivada de f(x) em relação a x, ou seja, $\frac{df(x)}{dx}$. Assinale a resposta CORRETA.

a) $\frac{df(x)}{dx} = 4x\cos(2x^2) - \frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

b) $\frac{df(x)}{dx} = 4x\cos(2x^2) + \frac{\cos(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

c) $\frac{df(x)}{dx} = 2x^2\operatorname{sen}(2x^2) - \frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

d) $\frac{df(x)}{dx} = \operatorname{sen}(2x^2) - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

e) $\frac{df(x)}{dx} = \cos(2x^2) - \operatorname{sen}(2\sqrt{x})$

16) (EN-99) A reta s passa pelo ponto (3, 0) e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto P(x, y). As coordenadas de x e y de P, são, respectivamente,

a) 2 e 4 b) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ c) 1 e 1 d) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ e) $\frac{5}{2}$ e $\frac{25}{4}$

17) (EFOMM-17) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 5^{\text{sen } x}$ no ponto $x = 0$ é:

a) $y = (\ln 5)x + 1$ b) $y = (-\ln 5)x - 1$ c) $y = 5x + 1$
d) $y = x + 1$ e) $y = -x + 1$

18) (EFOMM-18) Seja $C = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ com $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n$, o conjunto das n raízes da equação: $\frac{1}{3}\cdot\frac{d}{dx}(x^3 - 4) + \frac{5}{(x-2)^{-1}} = -4(x+1) + 4x$. Determine o valor de $a_1^n + a_2^n + a_3^n + ... + a_n^n$.

a) -5 b) 7 c) 25 d) 36 e) 37

19) Seja f uma função derivável cujo gráfico contém o ponto (1, 1). Sabendo que $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-1}{x-1}$, a equação da reta tangente ao gráfico de f em (1, 1) é

a) $y = 1$ b) $y = x$ c) $y = -x + 2$
d) $y = 2x - 1$ e) $y = -2x + 3$

20) Seja $f(x) = \text{arc tg}(x - 1) + x^3 + 1$ e seja g a função inversa de f. Então, g'(2) vale

a) 4 b) 2 c) 1 d) 1/2 e) 1/4

21) (EFOMM-18) A equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $\left(5, \frac{1}{5}\right)$ será

a) $25y + x - 10 = 0$ b) $10y - x + 7 = 0$ c) $7y + 2x - 2 = 0$
d) $10y + x - 10 = 0$ e) $5y + x - 10 = 0$

22) (IME-81) Dada a função f: IR → IR definida como

$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$f(x) = 1$, $x = 0$

determine os valores de m para os quais o gráfico de f admite tangente paralela à reta $y = mx$.

23) (EN-18) Seja $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$. Sabendo que f admite função inversa g, calcule g''(1) e assinale a opção correta.

a) 1/2 b) 1/4 c) 1/6 d) 1/8 e) 1/10

24) (IME-68) Seja g uma função real de variável real, par (isto é: $g(x) = g(-x)$) e derivável. Prove que sua derivada g' é uma função ímpar (isto é: $g'(-x) = -g'(x)$).

25) (EN-06) Seja L a reta tangente ao gráfico da função real; de variável real, $Y(x) = e^{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$ no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Se P e Q são os pontos de interseção de L com os eixos coordenados, a medida da área do triângulo de vértices P, Q e (0, 0) é:

a) $\frac{\sqrt{2}\pi(\pi+1)}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}(\pi+1)^2}{8}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2$
d) $\frac{\sqrt{2}(\pi-1)^2}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)^2$

26) (IME-86) A derivada de ordem n de uma função $y = f(x)$ é a primeira derivada da derivada de ordem $n-1$ da mesma função, ou seja: $y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)}$.

Calcule $[(x^2+1)\text{sen } x]^{20}$.

27) (EN-06) Sejam **f** e **g** duas funções reais e deriváveis tais que $f'(x) = \text{sen}(\cos\sqrt{x})$ e $g(x) = f(x^2)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pode-se afirmar que $g'(x^2)$ é igual a:

a) $2x \text{ sen } (\cos x^2)$ b) $2x^2 \cos(\cos x^2)$
c) $2x^2 \text{ sen } (\cos x^2)$ d) $2x \cos(\cos x)$
e) $2x^2 \text{ sen } (\cos x)$

28) (EN-07) A reta r tangente à curva de equação $x - \sqrt{xy} + y = 1$, no ponto $P = (x, y)$, é paralela ao eixo das abscissas. Pode-se afirmar que o ponto **P** também pertence à reta de equação.

a) $x = 0$ b) $y = 1$
c) $y - x + 2 = 0$ d) $y - x - 1 = 0$
e) $3y + 3x - 1 = 0$

29) (IME-53) Achar as coordenadas do ponto de interseção das tangentes a curva $y = x^2$ nos pontos P (2, 4) e Q(−3, 9).

30) A reta r é tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3$ e intercepta o eixo Oy no ponto de ordenada $y = -16$. O coeficiente angular de r é igual a

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

31) (IME-57) Dá-se a função $f(x) = \ln \frac{x(5-x)}{\sqrt{x^2-5x+6}}$. Dizer, justificando, se f(x) é derivável no ponto x = 6 e se a função referida admite, para algum valor finito de x, derivada infinita.

32) (IME-65) Determine as raízes de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ sabendo-se que $D_1 = mdc\,[f(x), f'(x)] = x^2 - x - 2$.

33) (EN-09) Cada termo de uma sequência de números reais é obtido pela expressão $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ com $n \in IN^*$. Se $f(x) = x.\text{arcsen}\left(\frac{x}{6}\right)$ e S_n é a soma dos n primeiros termos da sequência dada, então $f'\left(\frac{301}{100}S_{300}\right)$ vale

a) $\frac{2\sqrt{3}+\pi}{6}$ b) $\frac{6\sqrt{5}+5\pi}{30}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\pi}{18}$
d) $\frac{4\sqrt{3}+3\pi}{12}$ e) $\frac{\sqrt{3}+\pi}{3}$

34) (EN-87) A equação da reta que é tangente à curva $y = \frac{2x+3}{x-1}$ e que contém o ponto (3, 2) é:
a) y = -5x +17 b) y = -4x +14 c) y = -3x + 11
d) y = -2x +8 c) y = -x + 5

35) Seja $f(x) = x^3 + e^x$. Se g é a função inversa de f, então g'(1 + e) vale
a) 3 + e b) 1+ e c) 3 + 3e d) $\frac{1}{3+e}$ e) $\frac{1}{1+e}$

36) (EN-91) Se $f(x) = \ln \text{sen}^2 x$ determine $f'(\pi/4)$.
a) - ln 2 b) 1 c) $\pi/4$ d) 2 e) $2\sqrt{2}$

37) (EN-92) Se $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ então f '(2) vale:
a) –0,4 b) - 0,12 c) 0 d) 0,12 e) 0,4

38) (EN-09) Considere a função real f, de variável real, definida por $f(x) = x + \ln x$, x > 0. Se g é a função inversa de f, então g"(1) vale
a) 1 b) 0,5 c) 0,125 d) 0,25 e) 0

39) (EN-10) Sejam:

a) f uma função real de variável real definida por $f(x) = \text{arc tg}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$, x > 1 e

b) L a reta tangente ao gráfico da função $y = f^{-1}(x)$ no ponto $(0, f^{-1}(0))$. Quanto mede, em unidades de área, a área do triângulo formado pela reta L e os eixos coordenados?
a) 3/2 b) 3 c) 1 d) 2/3 e) 4/3

40) (EN-93) A área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela tangente à curva $y = 4x^2$ no ponto (1,4) vale:
a) 8 b) 4 c) 2 d) 1 e) 1/2

41) (EN-08) 15) Sejam L_1 a reta tangente ao gráfico da função real $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3x}}$ no ponto P (-1,f(-1)) e L_2 a reta tangente ao gráfico da função y = f'(x) no ponto Q (-1,f'(-1)). A abscissa do ponto de interseção de L_1 e L_2 é:
a) $-\frac{1}{9}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{3}$ e) 1

42) (EN-08) A função real f, de variável real, é definida por $f(x) = \ln(x^5 + x^3 + x)$. Podemos afirmar que a equação da reta normal ao gráfico da função inversa f^{-1} no ponto $(\ln 3, f^{-1}(\ln 3))$ é.
a) y – 3x + 3ln3 = 1 b) 3y – x + ln3 = 3 c) y + 3x –ln27 = 1
d) 3y + x – ln3 = -3 e) y + 3x – ln3 = 3

43) (EN-93) Se $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, o valor de $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ é:
a) 0 b) 1/3 c) 2/3 d) 4/3 e) 8/3

44) (EN-97) Sejam a, b $\in \Re$ tal que $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ e P'(x) a derivada de P(x). Sabendo-se que P(x) + 3 é divisível por (x + 1) e P'(x) – 5 é divisível por (x – 2) então a + b
a) –14 b) –12 c) –10 d) –8 e) –6

45) (EN-13) Considere f e f' funções reais de variável real, deriváveis, onde f(1) = f'(1) = 1. Qual o valor da derivada da função $h(x) = \sqrt{f(1+\text{sen}\,2x)}$ para x = 0?
a) – 1 b) – 1/2 c) 0 d) – 1/3 e) 1

46) (EN-13) Um ponto P(x, y) move-se ao longo da curva plana de equação $x^2 + 4y^2 = 1$, com $y > 0$. Se a abscissa x está variando a uma velocidade $\frac{dx}{dt} = \text{sen}\,4t$, pode-se afirmar que a aceleração da ordenada y tem por expressão

a) $\frac{(1+x^2)\text{sen}^2 4t + 4x^3 \cos 4t}{8y^3}$ b) $\frac{x^2 \text{sen}\,4t + 4x\cos^2 4t}{16y^3}$

c) $\frac{-\text{sen}^2 4t - 16xy^2 \cos 4t}{16y^3}$ d) $\frac{x^2 \text{sen}\,4t - 4x\cos^2 4t}{8y^3}$

e) $\frac{-\text{sen}^2 4t + 16xy^2 \cos 4t}{16y^3}$

47) (EN-20) Sejam p(x), q(x) e r(x) polinômios reais. Considere que p(x) cumpre os seguintes requisitos:

I – O polinômios $q(x) = 3x^3 - 21x + 18$ divide p(x);

II – $p(0) = 162$;

III – 1 é raiz de p'(x);

IV – $p'(0) = -477$

V – $\frac{p(x)}{r(x)} = q(x)$

Sabendo que o $gr(q(x)) > gr(r(x))$ e p'(x) indica a primeira derivada de p(x), assinale a opção que apresenta o polinômio r(x).

a) $r(x) = -9x + 9$ b) $r(x) = 7x^2 - 16x + 9$

c) $r(x) = -5x^2 + 16x + 9$ d) $r(x) = 3x^2 + 14x + 9$

e) $r(x) = -16x + 9$

48) A equação da reta tangente à curva $x^2 - xy + y^2 = 7$, no ponto (1, 3), é

a) $y - 5x + 2 = 0$ b) $y - 8x + 5 = 0$

c) $5y - x - 14 = 0$ d) $5y - 8x - 7 = 0$

e) $8y - x - 23 = 0$

49) (IME-72) Seja $A = \text{IR} - \{-1, 1\}$ e $f: A \to \text{IR}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]$, $\forall x \in A$. Mostre que se f(n) designa a derivada de ordem n de f, então podemos expressá-la sob a forma $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1}}$, onde P_n é um polinômio de grau n. Determine todas as raízes de P_n.

50) Seja f uma função derivável que verifica a equação $x^2 f(x) - f(x)^3 + x^3 = 8$. Se $f(2) = -2$ então f'(2) vale

a) -4 b) $-1/2$ c) 0 d) 1/2 e) 2

51) (EN-04) A função real f(x) satisfaz a seguinte equação

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2} + f(x)\right) = xf(x) - \frac{x}{2} + 3$$

Considere a função g, definida por $g(x) = k\frac{f(x)}{x}$ com $x \neq 0$ e $k \in \text{IR}$.

Sabendo que $f(2) = -1$, podemos afirmar que o valor da constante real k para que $g'(2) = f'(2)$ é

a) 1/2 b) 3/4 c) 4/3 d) 8/5 e) 2

52) (EN-04) Seja g(x) uma função real, derivável até a 3ª ordem para todo x real, tal que $g'(0) = 0$ e $g''(0) = 16$. Se f(x) é uma função real definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{2x} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$, então f'(0) é igual a

a) 16 b) 12 c) 8 d) 4 e) 0

53) (IME-69) Sendo f e g funções reais de variável real, tais que:

i) $f(x) = \begin{cases} g(x).\text{sen}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ii) g é derivável em $x = 0$ e $g(0) = g'(0) = 0$.

Calcular f'(0).

54) (EN-05) O valor das constantes reais a e b para as quais a função real $g(x) = \begin{cases} ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots \text{se} \ldots x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b \ldots\ldots\ldots\ldots \text{se} \ldots x > -1 \end{cases}$ seja derivável para todo x é

a) $a = 1/2$ e $b = 1$ b) $a = 1$ e $b = -1/2$ c) $a = -1/2$ e $b = 1$

d) $a = -1$ e $b = -1/2$ e) $a = 1/2$ e $b = -1$

55) (EN-05) A equação da reta que passa pelo centro da curva $4x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ e é normal ao gráfico da função real $f(x) = \text{arc sen}\sqrt{x}$ no ponto da abscissa $x = \frac{1}{2}$ é

a) $2y - 2x + 3 = 0$ b) $y - x + 3 = 0$ c) $y + x + 1 = 0$

d) $2y + 2x + 3 = 0$ e) $y - x - 1 = 0$

56) (EN-11) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2 - \text{arc sen}(x^2 + 2x)$ com $-\pi/18 < x < \pi/18$ e $g(x) = f(3x)$. Seja L a reta normal ao gráfico da função g^{-1} no ponto $(2, g^{-1}(2))$, onde g^{-1} representa a função inversa da função g. A reta L contém o ponto

a) (– 1, 6) b) (– 4, – 1) c) (1, 3) d) (1, – 6) e) (2, 1)

57) (IME-65) Se:

$y = e^{3t}$

$t = \text{sen}^2 x + 3x$

$x = 5u$,

Calcule o valor da derivada dy/du no ponto u = 0.

58) (IME-66) Dada a função $\sqrt[3]{y^x} = \lim \sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x...}}}}$, determine o valor numérico de $\frac{dy}{dx}$ no ponto x = 1.

59) (EFOMM-22) Sejam as funções f e g com derivadas f' e g'. Sabendo-se que $f(x^2) = f(g(x))^{1/2}$, onde f(4) = 1, g(2) = 4 e f'(4) não é nulo. O valor de g'(2) é

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 8

60) (IME-90) Considere as seguintes funções:

$f(x) = a^x$ onde $a > 1$

$g(x) = \sqrt{2px}$ onde $p > 0$

Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é: $a = e^{\frac{p}{e}}$

Neste case, determine, em função de p, a equação da tangente comum.

61) (EN-16) As curvas representantes dos gráficos de duas funções de variável real $y = f(x)$ e $y = g(x)$ interceptam-se em um ponto $P_0(x_0, y_0)$, sendo $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. É possível definir o ângulo formado por essas duas curvas no ponto P_0 como sendo o menor ângulo formado pelas retas tangentes àquelas curvas no ponto P_0. Se $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 1 - x^2$ e θ é o ângulo entre as curvas na interseção de abscissa positiva, então, pode-se dizer que o valor da expressão

$$\left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,\text{sen}\frac{5\pi}{12} + \cos 2\theta - \text{cossec}\frac{7\pi}{6}\right]^{1/2} \text{ é}$$

a) $\frac{\sqrt{82}}{5}$ b) $3\frac{\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{68}{25}$ d) $\frac{7}{25}$ e) $2\frac{\sqrt{17}}{5}$

62) (EN-17) A curva plana C é representada pelo gráfico da função real $f(x) = x^{\cos x}$ e tem uma reta tangente no ponto de abscissa $x = \pi$. Essa reta tangente, o eixo y e o arco de curva $x^2 + y^2 - 2\pi x = 0$ situado abaixo do eixo x, determinam uma região R, cuja área vale

a) $\pi(\pi + 1)$ b) $\frac{\pi^2}{2}\left(\pi - \frac{4}{\pi}\right)$ c) $\frac{\pi^2}{2}\left(\pi + \frac{4}{\pi}\right)$

d) $\frac{\pi^2}{2}\left(\pi + \frac{4}{\pi^2}\right)$ e) $\pi(\pi + 2)$

63) (EFOMM-24) Seja a função $f(x) = \cos(\ln(x^3 + 8x^2 + 21x + 19))$. O valor da derivada de f(x) calculada em $x = -2$ é

a) cos (1) b) 0 c) π d) cos 2 e) 1

64) (EN-86) O valor de a para qual as curvas de equações $y = a - x^2$ e $xy = 16$ são tangentes é:

a) 12 b) -4 c) 4 d) 2 e) 1

65) (EN-99) A equação do movimento de um projétil que se desloca ao longo do eixo x é $x(t) = e^{-\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}.\text{sen}\,t + \cot^2 t$, $t \geq 0$. A aceleração do projétil no instante $t = \pi/4$ é:

a) $16-\sqrt{2}$ b) $8+\sqrt{2}$ c) $8-2\sqrt{2}$

d) $16-2\sqrt{2}$ e) $16+\sqrt{2}$

66) (IME-85) Sejam as funções: $Z = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ e $Y = \sqrt{1-x^4}$

Mostre que no subconjunto dos reais onde as funções são definidas: $\frac{dZ}{dY} = \frac{Z}{x^2}$

67) (IME-85) Sabe-se que as raízes do polinômio abaixo são todas reais e distintas:

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n \in R$, $n = 0,1,\ldots,n$; $a_n \neq 0$.

Mostre que a derivada f'(x) possui também todas as suas raízes reais e distintas.

68) (IME-85) Encontre o valor de k para que a reta determinada pelos pontos A(0,3) e B(5,–2) seja tangente a curva $y = \frac{k}{x+1}$ para $x \neq -1$.

69) (EN-99) Supondo que y = f(x) seja uma função derivável e que satisfaz a equação $xy^2 + y + x = 1$, podemos afirmar que:

a) $f'(x) = \frac{-f(x)}{2xf(x)-1}$ b) $f'(x) = \frac{-1-(f(x))^2}{2xf(x)+1}$

c) $f'(x) = \frac{-(f(x))^2}{2xf(x)+1}$ d) $f'(x) = \frac{-1+(f(x))^2}{2xf(x)+1}$

e) $f'(x) = \frac{1-(f(x))^2}{2xf(x)+1}$

70) (EN-12) Em que ponto da curva $y^2 = 2x^3$ a reta tangente é perpendicular à reta de equação $3x - 3y + 2 = 0$?

a) $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$ b) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{16}\right)$ c) $(1, -\sqrt{2})$

d) $(2, -4)$ e) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

71) (EN-15) Se o limite $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}\right)$ representa a derivada de uma função real de variável real y = f(x) em x = a, então a equação da reta tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (a, f(a)) é

(A) $32y - x = 48$ (B) $y - 2x = -30$ (C) $32y - x = 3048$

(D) $y - 32x = 12$ (E) $y - 2x = 0$

72) Se a função $f(x) = 4x^3 - 6kx^2 + (9k-6)x - 2$ é crescente em IR, então

a) $k \leq -3$ b) $-2 \leq k \leq -1$ c) $1 \leq k \leq 2$

d) $3 \leq k \leq 4$ e) $5 \leq k$

73) (EN-19) Seja f uma função real, tal que $\frac{df(x)}{dx} > 0$, $\forall x \in IR$, ou seja, a função possui derivada positiva em toda a reta. Portanto, pode-se afirmar que f é uma função:

a) crescente. b) decrescente.

c) simétrica em torno de zero. d) estritamente positiva.

e) convexa.

74) (IME-83) Considere a função f definida nos reais por

$f(x) = (x - 1)\ln|x - 1| - x \ln x$:

a) Dê seu domínio e calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) Dada a função g definida nos reais por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \{0,1\} \\ 0 & \text{se } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

verifique se g é contínua em x = 1 e se é derivável neste ponto.

75) (EN-20) Sabendo que f é uma função definida por $f(x) = x^x$ e que D é o domínio de f, é correto afirmar que:

a) f possui um máximo global em $x = 1/e^2$ em D.

b) f possui um mínimo local em $x = 1/e^2$ em D.

c) f possui um máximo local em x = 1/e em D.

d) f possui um mínimo local em x = 1/e em D.

e) f não possui máximo ou mínimo em D.

76) (EN-13) Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$. É verdade que

a) f tem um ponto de mínimo em $]-\infty, 0[$

b) f tem um ponto de inflexão em]– 1/2, 1/2[

c) f tem ponto de máximo em $[0, +\infty[$

d) f é decrescente em [0, 1]

e) f é decrescente em [– 1, 2]

77) Qual dos pontos abaixo é ponto de inflexão de $f(x) = \ln(4 + x^2)$?

a) –3 b) –2 c) 0 d) 1 e) 4

78) (EN-10) Considere a função real f de variável real e as seguintes proposições:

I) Se f é contínua em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e tem um máximo local em $x - x_0$ então $f'(x_0) = 0$ e $f'(x_0) < 0$.

II) Se f é derivável em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e $f'(x_0) = 0$ então f tem um máximo ou mínimo local em $x = x_0$.

III) Se f tem derivada estritamente positiva em todos o seu domínio então f é crescente em todo o seu domínio.

IV) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ é finito então $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = 1$.

V) Se é derivável $\forall x \in IR$, então $\lim_{s\to 0}\frac{f(x)-f(x-2s)}{2s} = 2f'(x)$.

Podemos afirmar que

a) todas são falsas

b) tosão verdadeiras

c) apenas uma delas é verdadeira

d) apenas duas delas são verdadeiras

e) apenas uma delas é falsa

79) (EN-10) Considere as funções reais f e g de variável real definidas por $f(x)=\frac{\sqrt{e^{2x-1}-1}}{\ln(4-x^2)}$ e $g(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ respectivamente, A e B subconjuntos dos números reais, tais que A é o domínio da função f e B o conjunto onde g é crescente. Podemos afirmar que A∩B é igual a

a) $[1,\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$ b) $[1,2[\cup]2,+\infty[$ c) $]2,+\infty[$
d) $[1,\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},2[$ e) $]\sqrt{3},+\infty[$

80) Quantos pontos de inflexão tem a função $f(x) = 2x^6 - 9x^5 + 10x^4 + 1$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

81) Seja $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + c$, em que $c \in \mathbb{R}$. Então, o valor mínimo atingido por f é maior ou igual a zero se, e somente se,

a) $c \geq 5$ b) $c \leq 5$ c) $5 \leq c \leq 32$
d) $c \leq 32$ e) $c \geq 32$

82) (EFOMM-20) Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 38x + 15$ e $g(x) = -x^3 + 8x^2 - 18x + 16$. O menor valor de $|f(x) - g(x)|$ no intervalo [1, 3] é

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7

83) (EN-86) Os valores mínimo e máximo de $f(x) = ex^{-x^2}$ no intervalo [0,1] são respectivamente:

a) 0 e 1/e b) 0 e $1/\sqrt{2e}$ c) 1/e e $1\sqrt{2e}$
d) 0 e $1/2e^4$ e) 0 e e

84) (EN-17) Seja f uma função da variável real x, definida por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 4$. O máximo relativo de f vale:

a) $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$ d) $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$ e) $4+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

85) (EN-24) Seja f uma função polinomial, na variável x, de menor grau possível e coeficientes reais, tal que f(1) = 2, f(4) = 3, f(3) = 4 e f(2) = 1. Assim, é correto afirmar que f:

a) possui ponto de inflexão em x = 5/2.
b) possui ponto de máximo absoluto em x = 3.
c) possui um ponto de mínimo absoluto em x = 1.
d) não é contínua em x = 1.
e) não há um ponto de máximo local com x > 3.

86) (EN-24) Se x > 0, seja $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$, em que A é uma constante positiva. Assinale a opção que apresenta o menor valor de A tal que $f(x) \geq 24$, $\forall\, x > 0$.

a) $\frac{2^{11}.3^3}{7^3}\sqrt{\frac{6}{7}}$ b) $\frac{2^3.3^{11}}{7^{11}}\sqrt{\frac{6}{7}}$ c) 2^8 d) $\frac{2^7.3^{11}}{7^{11}}\sqrt{\frac{2}{3}}$ e) $\frac{2^8.3^{-7}}{7^{-3}}\sqrt{\frac{3}{2}}$

87) (EN-18) Analise as afirmativas abaixo.

I – Seja f derivável no intervalo I, f é estritamente crescente em I se, e somente se, $f'(x) > 0$ em I.

II – Se f: A→B é periódica de período T, então qualquer número da forma kT, com k inteiro positivo, também é um período de f.

III – Toda função contínua é derivável.

IV – Se uma função f: A→B é estritamente crescente ou decrescente em um conjunto X ⊂ A, então ela é sobrejetiva em tal conjunto.

V – Sejam f e g duas funções continuamente deriváveis que satisfazem as relações $f'(x) = g(x)$ e $f''(x) = -f(x)$. Se $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$, se $h(0) = 5$, então $h(10) = 5$.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I, II e IV são verdadeiras.
b) Apenas as afirmativas II, III, IV e V são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas III e V são verdadeiras.
e) Apenas as afirmativas II e V são verdadeiras.

88) (EFOMM-20) Seja a função f: [t, + ∞) definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. O menor valor de t, para que a função seja injetiva, é

a) – 1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

89) (EN-22) Seja a função f definida por $f(x) = \ln(x^2) - \frac{1}{x} + k$, com $x \in \mathbb{R}_-^*$ e $k \in \mathbb{R}$.

Sabendo que f tem apenas um zero real, o valor de k é

a) 2 – ln (2) b) ln (2) – 2 c) 2 – ln (4)
d) ln (4) – 2 e) ln (4) – 4

90) (EN-08) Seja f a função real, de variável real, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$. Podemos afirmar que:

a) *f* é derivável $\forall x \in \Re^*$.
b) *f* é crescente $\forall x \in \Re_+$
c) *f* é positiva $\forall x \in \Re_+$ e (1,f(1)) é ponto de inflexão.
d) a reta 3y – 3x + 1 = 0 é uma assíntota do gráfico da *f* e (0, *f*(0)) é ponto de máximo local.
e) *f* é derivável $\forall x \in \Re^* - \{1\}$ e 3y – 3x -1 = 0 é uma assíntota do gráfico da *f*.

91) (IME-68) Sejam r, m, p números reais maiores que zero, A a coleção dos pares (x, y) de números reais tais que $x + y = r$ e f a função cujo conjunto de definição é A e que associa a cada par (x, y) de A o número $x^m y^p$. Mostre que f tem máximo quando $\frac{x}{m} = \frac{y}{p}$.

92) (IME-70) Determinar os pontos de inflexão da Gaussiana $y = e^{-x^2}$

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

b) (0, 1)

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-0,5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-0,5}\right)$

d) Não existem pontos de inflexão

e) $(-\infty, 0)$ e $(+\infty, 0)$

f) nda

93) Considere o cilindro circular reto de maior volume, inscrito no cone reto de altura 12 cm e raio da base igual a 5 cm. O volume desse cilindro, em cm^3, é

a) 50π b) 45π c) $400\pi/9$ d) $675\pi/16$ e) $75\pi/2$

94) Seja p(x) uma função polinomial de grau 6, tal que $p(1) = -1$ e $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$. Sabendo que a derivada de p se anula somente no ponto x = 1, então o número de raízes reais distintas de p é

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

95) Qual é o maior valor possível para a área de um retângulo de lados paralelos aos eixos Ox e Oy, inscrito na elipse de equação $4x^2 + y^2 = 1$?

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 1 e) 2

96) (EN-06) Um recipiente cilíndrico que deve ter $1m^3$ de volume vai ser construído nas oficinas do Arsenal de Marinha, para atender a um dos navios da MB. Na lateral e na tampa, será utilizado um material cujo preço é R$ 1.000,00 por m^2 e, no fundo, um material cujo preço é R$ 2.000,00 por m^2. Que dimensões deve ter o recipiente, para que a MB tenha a menor despesa possível?

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ m e $\frac{1}{3\pi^2}$ m

b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{\pi}}$ m e $\frac{1}{9\pi\sqrt[3]{\pi^2}}$ m

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ m e $\frac{1}{\sqrt[3]{9\pi^2}}$ m

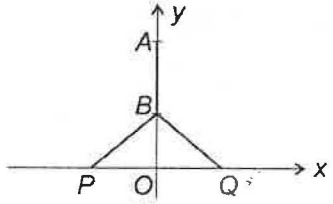
d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ m e $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$ m

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ m e $\frac{1}{\pi\sqrt[3]{9\pi^2}}$ m

97) Dentre os cilindros circulares retos inscritos numa esfera de raio 1, seja h_1 a altura daquele que tem volume máximo e seja h_2 a altura daquele que tem superfície lateral máxima. Então, $\frac{h_1}{h_2}$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

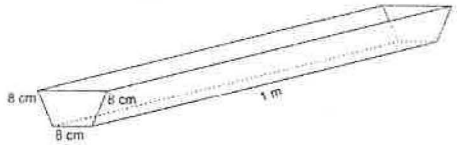
98) A casa e a fábrica do Sr. Paulo estão representadas no eixo Ox do diagrama abaixo, nas posições P = (– 1, 0) e Q = (1, 0) respectivamente.



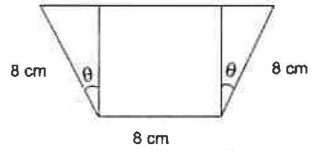
No ponto A = (0, 2) do eixo Oy, está representada a fonte de energia elétrica que abastecerá ambas as localidades P e Q. Um poste será construído no ponto B = (0, b) de maneira que o fio elétrico que sai de A será ligado ao poste B e daí sairão ramificações, uma para a casa em P e outra para a fábrica em Q. O poste B deverá ocupar uma posição tal que o comprimento do fio C = AB + BP + BQ seja o menor possível. Nessas condições, o comprimento C será

a) $1+\sqrt{3}$ b) $2+\sqrt{3}$ c) $3+\sqrt{3}$ d) $4+\sqrt{3}$ e) $5+\sqrt{3}$

99) Deseja-se construir uma calha de 1 m de comprimento cuja seção transversal seja um trapézio regular, conforme a figura abaixo.



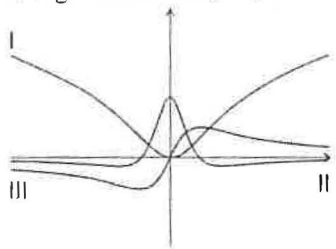
A inclinação θ dos lados do trapézio com relação à vertical deve ser escolhida de maneira que a calha comporte o maior volume possível de água.



Nessas condições, a capacidade da calha, em cm^3, será de

a) $4800\sqrt{2}$ b) $4800\sqrt{3}$ c) $4800\sqrt{5}$ d) $5000\sqrt{3}$ e) $5000\sqrt{5}$

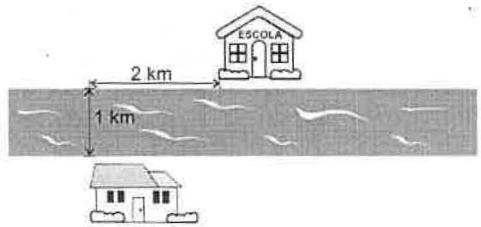
100) Na figura ao lado, estão representados os gráficos de uma função f, de sua primeira derivada f' e de sua segunda derivada f".



Os gráficos das funções f, f' e f" são, nesta ordem,

a) I, II, III b) I, III, II c) II, I, III d) III, I, II e) III, II, I

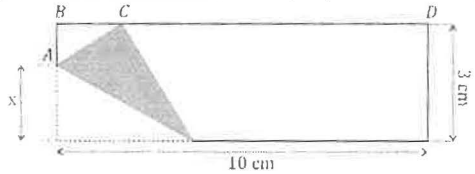
101) Paulo mora na margem de um rio de 1 km de largura, sem correnteza e com margens retilíneas e paralelas. Sua escola fica na outra margem, 2 km adiante, conforme a figura.



Para chegar à escola, Paulo deve tomar um barco que navega a 3 km/h em linha reta, da porta de sua casa até algum ponto na outra margem. O restante do caminho é percorrido a pé, a uma velocidade de 5 km/h. Qual o tempo mínimo necessário para Paulo ir de casa à escola?

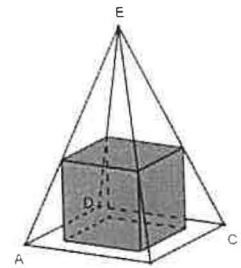
a) 32 min b) 36 min c) 40 min
d) 44 min e) 48 min

102) Uma tira de papel retangular de 3 cm×10cm, é dobrada, conforme indicado na figura, de modo que o ponto C esteja contido no lado BD e seja x a medida para a qual a área do triângulo ABC é máxima. Então, o perímetro do triângulo ABC é



a) $2+\sqrt{2}$ b) $2+\sqrt{3}$ c) $3+\sqrt{2}$ d) $3+\sqrt{3}$ e) $4+\sqrt{2}$

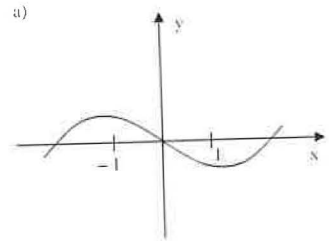
103) (EFOMM-22) Seja a pirâmide quadrangular regular ABCDE com aresta da base $4\sqrt{2}$ e aresta lateral 8. Considere o prisma quadrangular regular interior à pirâmide. O prisma possui base inferior sobre a base da pirâmide e os vértices da base superior estão sobre as arestas laterais da pirâmide, como sugere a figura abaixo. O volume máximo do prisma é igual a



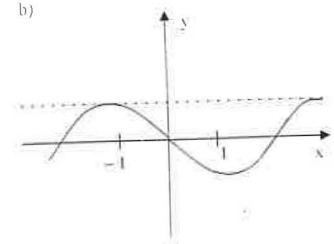
a) $\frac{512\sqrt{3}}{27}$ b) $\frac{128\sqrt{3}}{9}$ c) $\frac{256\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{256\sqrt{3}}{27}$

104) (EN-89) A representação gráfica da função $f(x) = x - 2\text{arc tg}x$ é:

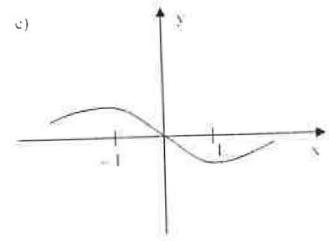
a)



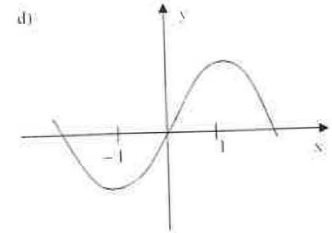
b)



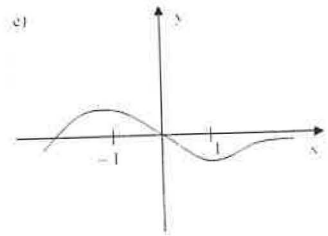
c)



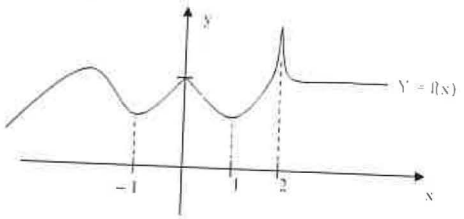
d)



e)

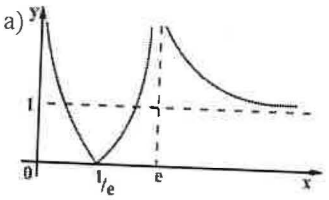


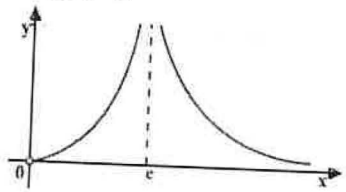
105) (EN-89) Considere o gráfico da função f dado abaixo onde f é contínua.

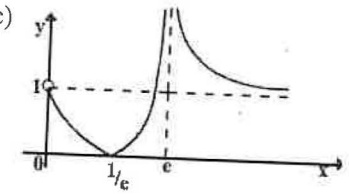


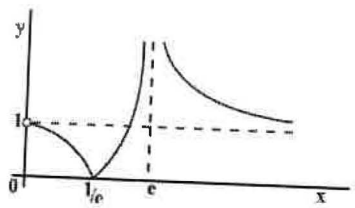
a) $\forall x \in \Re$ é derivável $\forall x \in \Re,\ x \neq 0$
b) e derivável $\forall x \in \Re,\ x \neq 0$
c) $\forall x \in \Re,\ x \neq 0$ é derivável $\forall x \in \Re,\ x \neq 0$ e $x \neq 2$
d) e derivável $\forall x \in \Re,\ x \neq 0$.
e) $\forall x \in \Re,\ x \neq 2$ e $x \neq 0$ e derivável $\forall x \in \Re,\ x \neq 0$

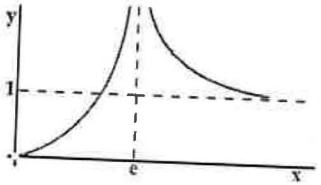
106) (EN-97) O gráfico da função $f(x) = \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right|$ é:

a)


b)


c)


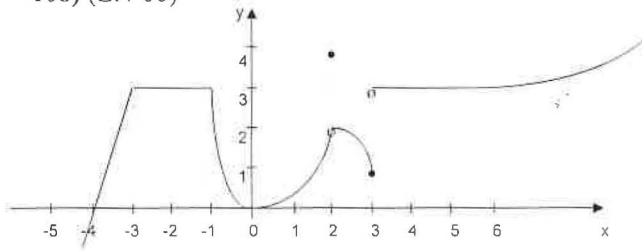
d)


e)


107) (EN-99) Um navio levará estocado um latão de óleo contendo 100 π dm³ de volume e deve ter a forma de um cilindro com base plana e a parte superior hemisférica, conforme a figura acima. Desprezando a espessura do material, podemos afirmar que o raio r da base, para que seja gasto a menor quantidade possível de material para a confecção do latão é:

a) $3\sqrt{60}$ b) $2\sqrt{15}$ c) $4\sqrt{50}$ d) $3\sqrt[3]{15}$ e) $\sqrt[3]{60}$

108) (EN-00)



Seja y = f (x) uma função real cujo gráfico está representado acima. Nas proposições abaixo, coloque C na coluna à direita quando a proposição for certa e E quando for errada

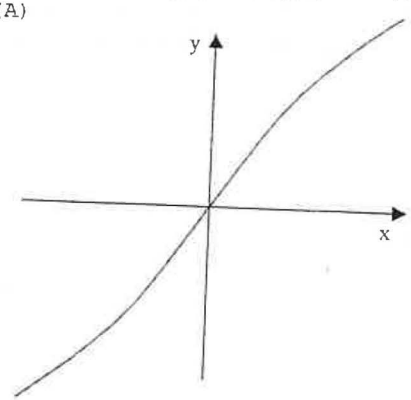
(I) f (x) é positiva e contínua $\forall\ x \in [-4, 5]$
(II) $f(0) = f(-4) = 0$ e $f(2) = 2$
(III) $f'(-4) > 0$ e $f'(x) = 3\ \forall\ x \in]3, 5[$
(IV) f (x) é crescente $\forall\ x \in]-\infty, -3[\cup]0, 2[\cup]5, +\infty[$
(V) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$

Lendo a coluna da direita de cima para baixo encontramos
(A) E E E C C (B) E C E C E
(C) E E E C E (D) C C E E E
(E) C C C C E

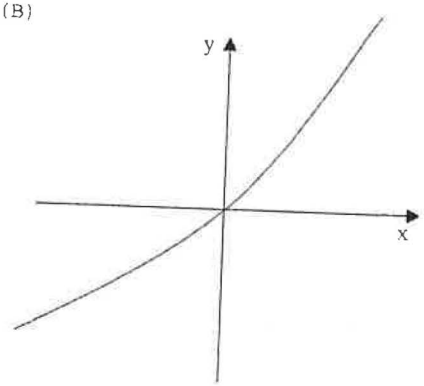
109) (EN-03) De um ponto p dos cais, João observa um barco AB ancorado. Para um sistema de eixo ortogonais os pontos A e B têm coordenadas respectivamente iguais a (0, 20) e (0, 40), enquanto P encontra-se no semi-eixo positivo das abscissas. Se o ângulo $A\hat{P}B$ de observação é máximo, então a abscissa de P é igual a:
a) $20\sqrt{2}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 20 d) 15 e) 10

110) (EN-06) Dentre as opções abaixo, aquela que melhor representa o gráfico da função real de variável real $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$ é

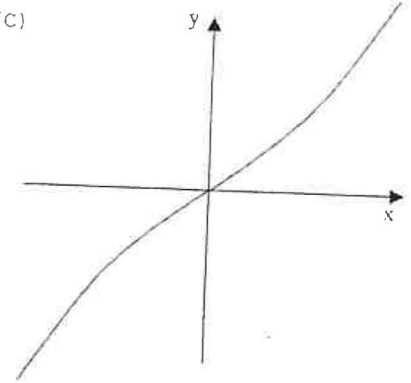
(A)



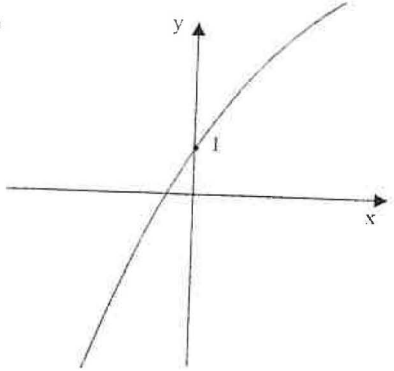
(B)



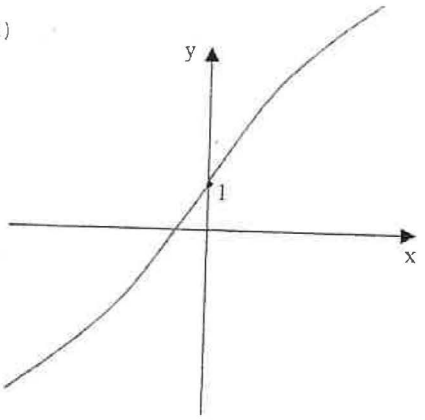
(C)



(D)

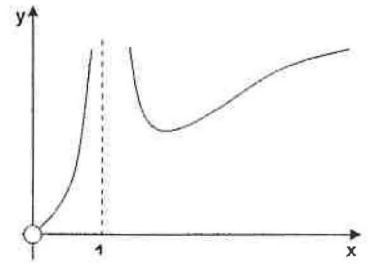


(E)

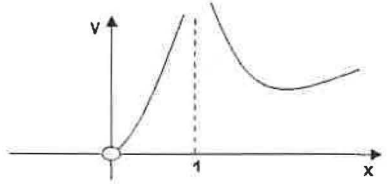


111) (EN-09) A melhor representação gráfica para a função real f, de variável real, definida por $f(x) = \left|\frac{x}{\ln x}\right|$ é

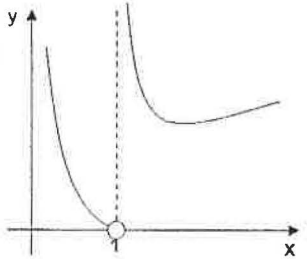
(A)



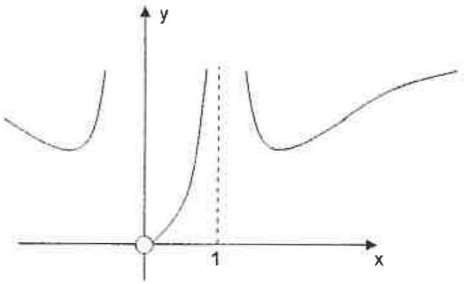
(B)



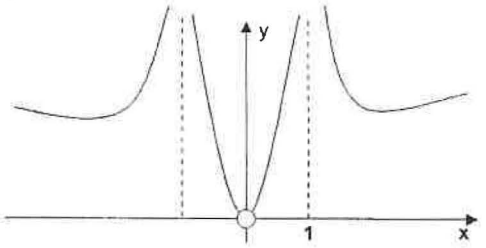
(C)



(D)



(E)

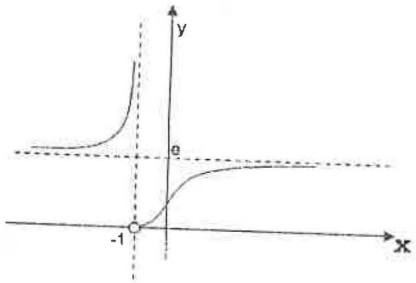


112) (EN-11) Seja L uma lata de forma cilíndrica, sem tampa, de raio da base r e altura h. Se a área da superfície de L mede $54\pi a^2$ cm^2, qual deve ser o valor de $\sqrt{r^2 + h^2}$, para que L tenha volume máximo?

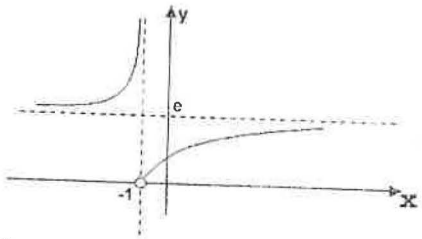
a) a cm b) 3a cm c) 6a cm d) 9a cm e) 12a cm

113) (EN-11) A figura que melhor representa o gráfico da função $y = e^{x-1}$ é

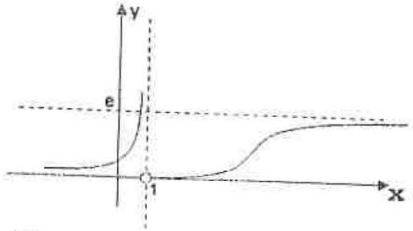
(A)



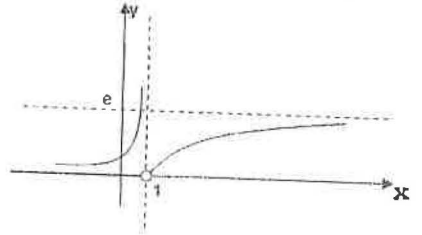
(B)



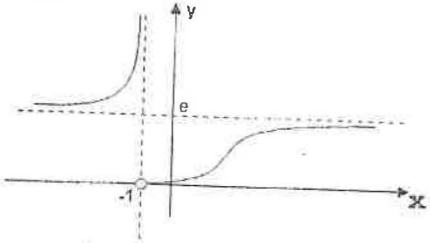
(C)



(D)

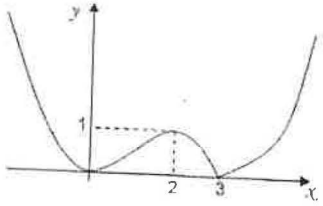


(E)

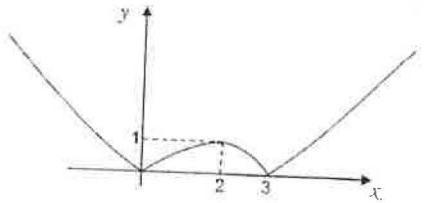


114) (EN-12) O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x) = \frac{1}{4}\left|x^3 - 3x^2\right|$ é

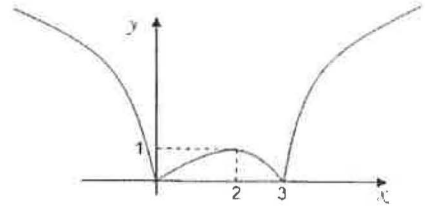
(A)



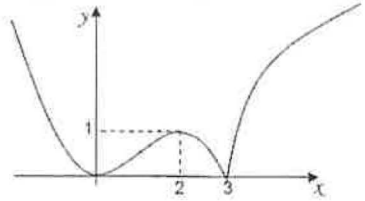
(B)



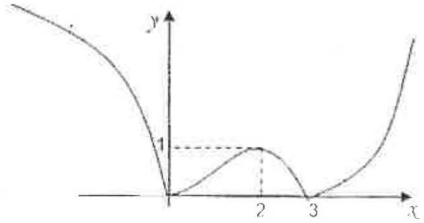
(C)



(D)

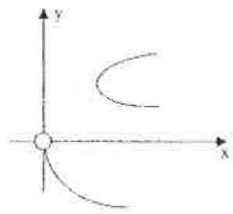


(E)

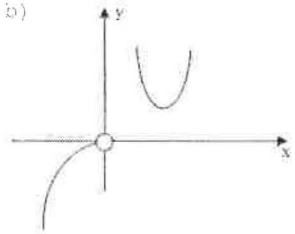


115) (EN-13) A figura que melhor representa o gráfico da função $x = |y|e^{\frac{1}{y}}$ é

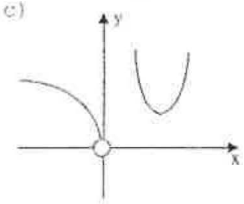
a)



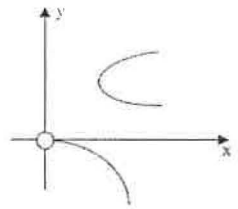
b)



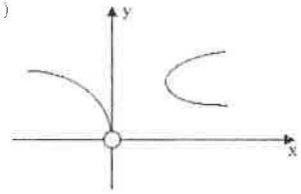
c)



d)



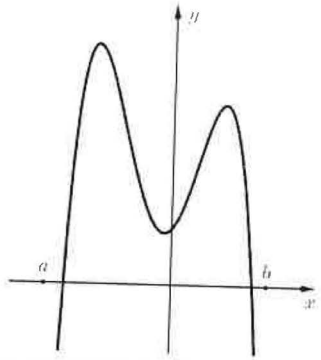
e)



116) (EN-17) Um cilindro circular reto tem área total A (constante), raio da base R e altura h. Se o volume máximo desse cilindro é expresso por um número real m e a função f da variável real x é definida por $f(x) = (2\pi x^2)^{1/3} + 1$ pode-se dizer que f(m) vale:

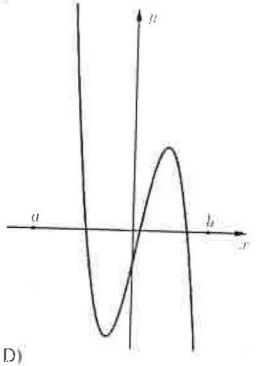
a) A/3 b) A + 3 c) (A + 3)/3 d) (A – 3)/3 e) $A\frac{\sqrt{2}}{3} + 1$

117) (EN-18) A figura abaixo mostra o esboço do gráfico que representa a função real f $\forall x \in]a, b[$.

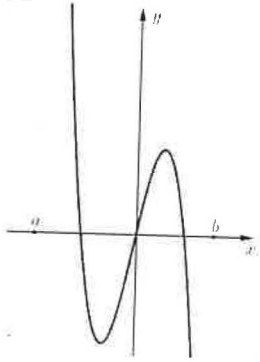


Assinale a opção que melhor representa o esboço do gráfico de f', $\forall x \in]a, b[$.

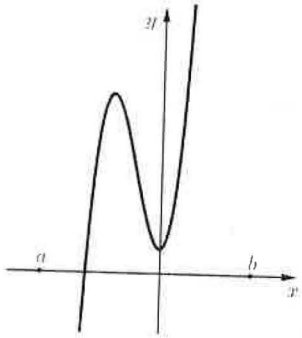
(A)



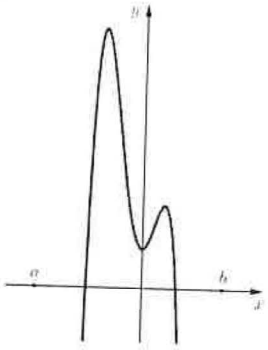
(B)



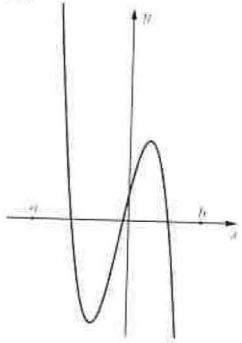
(C)



(D)



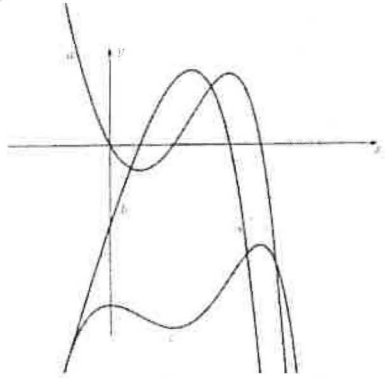
(E)



118) (EN-19) Seja a função real f: $[2, 4] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 10$ e o retângulo ABOC, com A(t, f(t)), B = (0, f(t)), O(0, 0) e C(t, 0), onde $t \in [2, 4]$. Assinale a opção que corresponde ao menor valor da área do retângulo ABOC.

a) 8 b) 15/2 c) 200/27 d) 50/9 e) 20/3

119) (EN-22) Seja f uma função real e f ' e f " as derivadas de ordens 1 e 2, respectivamente. A figura abaixo mostra parte dos gráficos de f, f ' e f ", indicados pelas letras a, b e c. Dessa forma, assinale a opção que apresenta uma correspondência correta.



a) a = f e b = f " b) c = f " e a = f ' c) c = f ' e b = f
d) a = f ' e b = f " e) a = f e c = f '

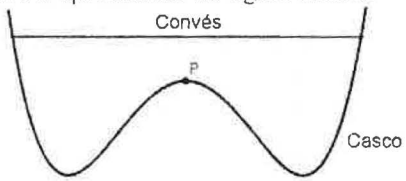
120) (EN-22) Considere dois navios e um submarino da Marinha do Brasil em um exercício de operações navais. Os navios serão chamados de P31 e P32 e o submarino de S40. Supondo que, às 12 h, S40 verifica que, em seu sonar, P31 está 100 km a oeste de P32 e que P31 está navegando para o sul a 35 km/h e P32 está indo para norte a 25 km/h. O comandante do S40 determina ao operador de sonar que verifique e lhe dê a resposta de quão rápido estará variando a distância entre P31 e P32, às 16 h. Assinale a opção que apresenta a resposta correta do operador de sonar ao comandante do S40, aproximadamente.

a) 52,3 km/h b) 55,4 km/h c) 56,8 km/h
d) 59,3 km/h e) 59,9 km/h

121) (EN-24) Um cilindro circular reto de raio r e altura h possui volume igual a 300 cm^3. Sabendo que o cilindro possui menor área total possível, a altura h, em cm, é aproximadamente igual a:

a) 7,25 b) 6,90 c) 6,15 d) 3,63 e) 2,00

122) (EN-22) Um barco catamarã foi construído de forma que a parte central do casco possui seção transversal modelada pela função f, definida por $f(x)=\frac{1}{3}x^4-1,2x^2$, com x em metros, conforme apresentado na figura abaixo.



A linha do convés encontra-se a 0,5 m do ponto alto P (distância vertical). Considerando apenas a figura plana, a distância, em metros, do convés ao ponto mais baixo do casco é igual a:

a) 1,08 b) 1,34 c) 1,58 d) 1,84 e) 2,08

123) A área da superfície de uma lata cilíndrica com fundo e sem tampa é 12 cm^2. O maior valor possível para o volume da lata é, em cm^3,

a) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ b) $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ c) $\frac{12}{\sqrt{\pi}}$ d) $\frac{16}{\sqrt{\pi}}$ e) $\frac{18}{\sqrt{\pi}}$

124) Deseja-se fabricar uma caixa d'água sem tampa, de fundo quadrado, de maneira que o seu volume seja de 108 m^3. Para minimizar a quantidade de material utilizado na confecção da caixa, o lado da base quadrada deve valer

a) 2 m b) 4 m c) 6 m d) 8 m e) 10 m

125) (IME-76) Considere $y=\frac{x(x+1)}{x^2+1}$. Determine os pontos de máximo, de mínimo, de inflexão, as suas assíntotas e verifique se os pontos de inflexão pertencem a uma mesma reta, apresentando, em caso afirmativo, a equação desta reta. Faça um esboço da função indicando os pontos e retas acima aludidos.

126) (IME-79) É dada a função $f: R \to R$ tal que:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+k}{\sqrt[3]{x^2-1}}, & \text{se } x\neq\pm1\\ 0, & \text{se } x=1\\ -1, & \text{se } x=-1\end{cases}$$

a) Se k = – 1, determine os pontos de descontinuidade de f.

b) Se k = 0:

i) Determine as raízes de $f'(x) = 0$.

ii) Determine as Raízes de $f''(x) = 0$.

iii) Faça o esboço do gráfico da função em coordenadas ortonormais.

127) (IME-82) Seja a função f definida, no conjunto dos reais, por:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{para } x\leq -2\\ \cos\frac{\pi x}{2}, & \text{para } -1<x\leq 0\\ e^{-2x}, & \text{para } 0<x\leq 1\\ \frac{1}{x}, & \text{para } x>1\end{cases}$$

a) Determine o domínio e a imagem de f.

b) Determine os pontos de descontinuidade e os pontos onde f não é derivável.

c) Determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.

d) Determine os pontos e os valores de máximo e mínimo de f. Calcule o supremo e o ínfimo da imagem de f.

128) (IME-84) Dada a função definida nos reais por $y=e^{x^{x^2}-1}$

a) Estude a sua variação quanto a: continuidade e possível simetria de sua representação, crescimento ou decrescimento, extremos, inflexões e assíntotas.

b) Faça o esboço gráfico da curva representativa da função.

129) (IME-88) Seja a função $f(x)=6\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$:

(A) Determine os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de $f(x)$, caso existam.

(B) trace o gráfico desta função.

130) (IME-89) Esboce o gráfico da função $y = f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$ assinalando os pontos críticos.

131) (IME-92) Seja $f:[0,\infty[\to\Re$ uma função contínua tal que:

(1) $f(0)=0$

(2) $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, \forall x\in]0,\infty[$

(3) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

Pede-se:

(A) os intervalos onde f é crescente (respectivamente, decrescente).

(B) Os intervalos onde o gráfico de f' é côncavo para cima (respectivamente, para baixo).
(3) Onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo absolutos e de inflexão?

132) (IME-97) Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja V_1 o volume do cone e V_2 o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = kV_2$.
Sugestão: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extremidades deste diâmetro.

133) Um cubo está se dilatando de modo que, em cada instante, mantém sua forma cúbica. No instante t_0, seu volume é de 8 cm^3 e cresce a uma taxa de 1,2 cm^3/s. A taxa de variação da sua aresta no instante t_0, em cm/s, é
a) 0,083 b) 0,1 c) $\sqrt{0,4}$ d) 0,4 e) $\sqrt[3]{1,2}$

134) Qual é a taxa de variação, em cm/s, da diagonal de um retângulo, num instante em que um dos lados mede 4 cm e está crescendo a taxa de 2 cm/s e o outro lado mede 3 cm e está crescendo a taxa de 4 cm/s?
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

135) (EN-97) Dois trens se deslocam sobre trilhos paralelos, separados por ¼ km. A velocidade do primeiro é de 40 km/h e a do segundo 60km/h, no mesmo sentido que o primeiro. O passageiro A do trem mais lento observa o passageiro B do trem mais rápido. A velocidade com que muda a distância entre eles quando A está a 1/8 km à frente de B é, em km/h:
a) $20/\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) 0 d) $-\sqrt{5}$ e) $-20/\sqrt{5}$

136) Em uma corrida de bicicletas, o consumo instantâneo de energia de uma atleta, em cal/h, é dado em função de sua distância x ao ponto de largada, em km, conforme a seguinte expressão $E(x) = 5(x-1)^3(x-5) + 525$. Qual é o consumo instantâneo mínimo de energia, em cal/h, atingido pela atleta, sabendo-se que a pista tem 7 km de extensão?
a) 375 b) 390 c) 525 d) 550 e) 600

137) (EN-18) Uma partícula se desloca da direita para a esquerda ao longo de uma parábola $y = \sqrt{-x}$, de modo que sua coordenada x (medida em metros) diminua a uma velocidade de 8 m/s. É correto afirmar que a taxa de variação do ângulo de inclinação θ, em rad s, da reta que liga a partícula à origem, quando $x = -4$, vale
a) 3/2 b) 2/5 c) 3/4 d) 1/5 e) 4/3

138) (EN-22) Considere um triângulo ABC de modo que C esteja na origem do sistema cartesiano, A esteja no eixo das abscissas com coordenada (x, 0), com $x > 0$, B esteja no primeiro quadrante e θ seja a medida do ângulo ∠ACB. Considere também que os comprimentos dos segmentos CB e AB sejam, respectivamente, 3 cm e 5 cm, e que θ varie a uma taxa constante de 1/2 rad/s. Desse modo, assinale a opção que apresenta a velocidade do ponto A quando $\theta = \pi/2$ rad.
a) – 1/2 cm/s b) 3/4 cm/s c) 1/2 cm/s
d) – 3/2 cm/s e) – 4/3 cm/s

139) (Efomm-17) Considere a equação $x^4 - 2ax^3 + 4ax^2 - 6ax + 9a = 0$. Sabendo que a é raiz dupla dessa equação e não é nulo, determine o valor de a.
a) – 1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

140) (UECE-04) Se o número 2 é uma raiz de multiplicidade dois da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$, então o valor de a + b é:
a) – 11 b) 11 c) – 12 d) 12

141) (IME-90) Para que valores de p a equação: $x^4 + px + 3 = 0$, tem raiz dupla?

142) (ITA-04) Para algum número real **r**, o polinômio $\mathbf{8x^3 - 4x^2 - 42x + 45}$ é divisível por $\mathbf{(x - r)^2}$. Qual dos números abaixo está mais próximo de **r**?
a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42 d) 1,32 e) 1,22

143) (IME-75) Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que seja divisível por $(x-1)^2$.

144) (ITA-04) Considere a equação $\mathbf{x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0}$, em que **d** é uma constante real. Para qual valor de **d** a equação admite uma raiz dupla no intervalo **|0, 1|**?

145) (ITA-60) Demonstrar que se a equação $x^3 + ax + b = 0$ $(ab \neq 0)$ tiver uma raiz dupla, então a será sempre positivo.

146) Determine os valores de a e b de modo que $(x-1)^2$ divide $ax^4 + bx^3 + 1$.

147) Para que valores de a e n o polinômio $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ é divisível por $(x-1)^2$.

148) (IME-98) Determine α, β e γ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$ racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x = 1$.

149) (IME-80) Determine o polinômio f(x) de coeficientes racionais e do 7º grau, sabendo-se que: $f(x) + 1$ é divisível por $(x-1)^4$ e que $f(x) - 1$ é divisível por $(x+1)^4$.

150) Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ as raízes de $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$. Calcule o valor de:

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - 1}.$$

151) Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 + 8x + 5 = 0$, calcule o valor de

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

152) Se α, β e γ são as raízes de $x^3 - x - 1 = 0$, calcule $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

153) (IME-71) Achar o limite da soma dos termos da série abaixo. (O valor absoluto da a é maior que 1).

$$\frac{a}{a} + \frac{2a}{a^2} + \frac{3a}{a^3} + \frac{4a}{a^4} + \ldots$$

154) (ITA-77) Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k+1)x^k$, onde $x > 1$ e k é um inteiro maior que 2, então, se k é um inteiro maior que 2.

a) $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$ b) $S_n = \frac{1+x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)}{1-x}x^{n+1}$

c) $S_n = \frac{1+x^{n+1}}{(1-x)} - \frac{(n+2)}{(1-x)^2}x^{n+1}$ d) $S_n = \frac{1+x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{(n+2)}{1-x}x^{n+1}$

e) n.d.a.

155) Calcule o valor de $S = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2\binom{n}{k}$.

156) Calcule $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}2^k$.

157) Calcule: $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^k$.

158) Prove que $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = (n+3)(n+2)(n+1)n/4$

159) O valor de $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{e^x - 1}$ é

a) -1 b) $-1/2$ c) 0 d) 1/2 e) 1

160) O valor de $\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{\ln(x^4 + 3x)}$ é

a) 0 b) 1/4 c) 1 d) 2 e) 4

161) Dada a função $f(x) = \frac{2(x - \operatorname{sen} x)}{-5x^3}$, o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ é

a) 1/5 b) $-1/5$ c) 1/15 d) $-1/15$

162) O valor de $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ é

a) $-\infty$ b) -1 c) 0 d) 1 e) $+\infty$

163) O valor de $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2} - x}{x^2 - 1}$.

164) Indique o valor do limite $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x^2 . \ln\frac{1}{1-\cos x}$

a) 1 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 0

165) (EN-91) Calcule $\lim_{x\to 0} x\, e^{1/x}$

a) 0 b) 1 c) $\sqrt{e}$ d) e e) ∞

166) (EN-97) O valor de $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$ é:

a) $-\infty$ b) $-1/2$ c) 0 d) 1/2 e) Não existe.

167) O limite da função $f(x) = \frac{\ln x}{\cot x}$, quando x tende a zero é

a) – 1 b) 1 c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) 0

168) (IME-71) Indique abaixo o valor da expressão $\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1-x)}{\text{sen } x}$.

a) e b) 0 c) – 1 d) 1 e) – e f) nra

169) (EN-02) Qual o valor do $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$?

a) e b) 1/e c) 0 d) –1

170) (EN-03) Se $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = P$, então

a) $0 \le P \le \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3} < P \le \frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2} < P \le 1$ d) $1 < P \le 2$ e) $2 < P \le 3$

171) Calcule o valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

172) Calcule o valor de $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

173) Calcule o valor de $\lim_{x\to 0^+} x.\ln x$

174) Calcule o valor de $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen } 2x)}{\ln(\text{sen } 3x)}$.

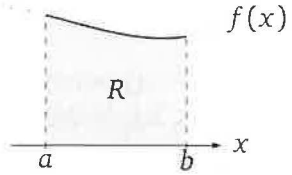
175) Calcule o valor de $\lim_{x\to 0} \frac{\text{arc tg } 5x}{\text{arc tg } 7x}$.

INTEGRAL

3.1. INTRODUÇÃO

No ensino fundamental e no ensino médio o aluno aprende uma série de fórmulas pro cálculo da área de superfícies e volume de sólidos elementares. Todo aluno sabe decorada a fórmula da área do quadrado, área do retângulo, área do triângulo, área do paralelogramo, área do trapézio, volume do cubo, volume da pirâmide, volume do cilindro, volume do cone e volume da esfera. Mas, e quando a superfície ou sólido não forem essas figuras elementares? Em alguns casos é até possível decompor a figura original em figuras menores elementares. Porém, o que fazer quando isso não for possível? Newton e Leibniz inventaram um método que permite calcular a área de qualquer superfície e o volume de qualquer sólido, desde que exista uma expressão algébrica que caracterize esse ente geométrico. Vamos começar a formalizar melhor esse método.

Suponha que f(x) é uma função contínua e positiva e se deseja calcular a área compreendida pelo gráfico da função e o eixo x, delimitada pelas retas verticais x = a e x = b, conforme indicado na figura abaixo.



Caso o gráfico de f(x), para $a \le x \le b$, seja uma reta horizontal, significa que f(x) é constante nesse intervalo, tipo f(x) = k, e aí basta utilizar a fórmula da área do retângulo: S = k(b – a).

Entretanto, como já foi citado no primeiro parágrafo, o objetivo é determinar um método universal pro cálculo dessa área, sem depender que a curva tenha um formato amigável.

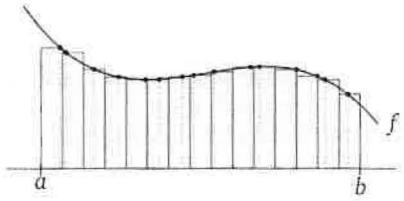
Uma estratégia pra calcular a área compreendida entre o gráfico de f(x) e o eixo x, de forma aproximada, é particionar a área em retângulos menores. O primeiro passo tomar n + 1 pontos $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n \equiv b$ igualmente espaçados entre a e b, de modo que o intervalo [a, b] fique dividido em n intervalos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, i = 1, 2, ..., n, de mesmo comprimento $\frac{b-a}{n}$.

Note que $[a, b] = [x_0, x_1[\cup [x_1, x_2[\cup [x_2, x_3[\cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$

Depois, deve-se escolher, em cada um dos n intervalos $[x_{i-1}, x_i[$, um ponto t_i e calcular $f(t_i)$. A área delimitada pelo gráfico de f(x), pelas retas x = a e x = b e o pelo eixo x pode ser aproximada pela soma das áreas dos retângulos cujas bases valem $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e alturas $f(t_i)$, i = 1, 2, ..., n:

$$I_n = f(t_1).\Delta x_1 + f(t_2).\Delta x_2 + ... + f(t_n).\Delta x_n$$

como indicado na figura seguinte:



Agora é importante perceber que se fizermos n tender pra infinito, o valor de I_n tende pra área compreendida entre gráfico de f, o eixo x e as retas x = a e x = b. A esse somatório das infinitas áreas, tomando um número infinito de partições do intervalo [a, b], se chama **integral da função f** no intervalo [a, b]. Repare que, nesse caso, o comprimento de cada intervalo Δx_i tende a zero.

Já estamos preparados pra formalizar o conceito da integral de uma função:

Definição: A função f: [a, b]→IR é integrável se $\lim_{n\to+\infty} I_n$ existir, independentemente dos intervalos Δx_i tomados, onde $\Delta x_i \to 0$, e dos t_i escolhidos. Quando f é integrável, $\lim_{n\to+\infty} I_n$ é chamado de **integral de Riemann de f** ou **integral definida de f** no intervalo [a, b], cuja notação é:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_a^b f(x)dx .$$

Os números a e b, que são os extremos do intervalo onde a função está sendo integrada, são denominados de **limites de integração**.

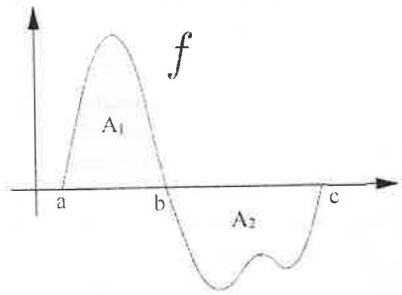
Perceba a similaridade entre a notação de integral e o somatório infinito que é equivalente a integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{\infty} f(t_i)\Delta x_i$$

Essa similaridade não é aleatória, o símbolo de integral $\int$, inventado por sir Isaac Newton, é pra lembrar a letra S, de "sum", soma em inglês.

Toda integral de função contínua de uma variável pode ser interpretada como uma área. Assim, o símbolo $\int_a^b f(x)dx$ sempre significa um número, não uma função. Além disso, é possível que uma integral dê como resultado um número negativo, apesar de sua interpretação ser uma área. Quando o resultado de uma integral de uma função contínua de uma variável dá negativo significa que todo o gráfico de f ou uma parte de seu gráfico está abaixo do eixo x. Nesse caso, para que toda integral tenha

uma área associada, convencionou-se que as áreas abaixo do eixo x são iguais a menos a integral naquele intervalo.



Por convenção: $A_1 = \int_a^b f(x)dx > 0$ e que $A_2 = -\int_b^c f(x)dx > 0$. Caso ocorra $\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \left|\int_b^c f(x)dx\right|$ então $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = A_1 - A_2 < 0$, que é exatamente o caso citado anteriormente da função ter uma parte do gráfico acima e outra parte abaixo do eixo x.

3.2. PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Suponha, em todas as propriedades, que f: [a, b]→IR e g: [a, b]→IR são funções integráveis.

(1) Se λ∈IR é uma constante real, então λf é integrável e $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$;

(2) f(x) + g(x) são integráveis e $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

(3) Se a < c < b, então $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$;

(4) Se f(x) ≤ g(x), ∀x∈[a, b], então $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

(5) Se f(x) é par então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

(6) Se f(x) é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Todas essas propriedades podem ser facilmente demonstradas utilizando a interpretação geométrica de integral. As demonstrações ficarão a cargo do leitor.

Teorema: Toda função contínua é integrável.

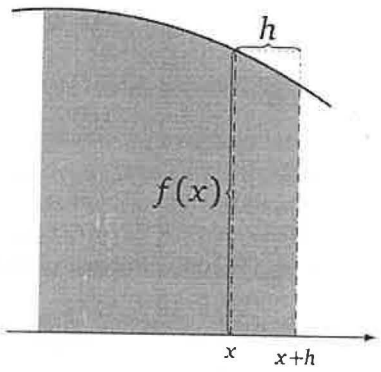
A demonstração desse teorema envolve conceitos não abordados nesse livro.

3.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Teorema: Se f: [a, b]→IR é uma função contínua, então a função área I: [a, b]→IR, definida por $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável para x∈(a, b) e sua derivada é igual a f:

$$I'(x) = f(x)$$

Demonstração:



A demonstração rigorosa desse teorema envolve conceitos que não são abordados nesse livro. A seguir será apresentada uma justificativa pouco rigorosa pro teorema.

Considere uma função f(x) contínua. Sendo I(x) a área compreendida pelo gráfico de f e o eixo x, quando a incógnita varia desde x até x + h, a área correspondente é I(x + h) – I(x).

Fazendo h→0, essa área pode ser aproximada pela área de um retângulo de base h e altura f(x):

$$I(x+h) - I(x) = f(x).h, \text{ para } h \to 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{I(x+h)-I(x)}{h} = f(x) \Rightarrow I'(x) = f(x)$$

Para uma demonstração mais rigorosa desse teorema procure por um livro de cálculo universitário. Como já foi justificado várias vezes, o foco desse livro são os concursos militares e para demonstrar muitos dos teoremas de cálculo são necessários teoremas muito avançados pro objetivo dessa obra.

Definição: Se f: A→IR é uma função de modo que exista F: B→IR derivável tal que F'(x) = f(x), para todo x∈A∩B, então F é denominada de **primitiva de f**.

Por exemplo, se $f(x) = 3x^2$ então $F(x) = x^3$ é primitiva de f(x), desde que F'(x) = f(x). Entretanto, $G(x) = x^3 + 1$ também e primitiva de f(x). Na verdade, qualquer função do tipo $H(x) = x^3 + k$, onde k é uma constante real, é primitiva de (x) = $3x^2$.

A observação desse resultado permite enunciar o seguinte teorema.

Teorema: Se F(x) e G(x) são primitivas de f(x) então existe uma constante real k tal que F(x) – G(x) = k.

Demonstração:

Seja a função Δ(x) dada por F(x) – G(x).

Se F e G são primitivas de f: F'(x) = f(x) e G'(x) = f(x).

Derivando dos dois lados: Δ'(x) = F'(x) – G'(x) = 0.

A única função que possui derivada numa em todos os pontos do seu domínio é a função constante: Δ(x) = k.

Mas como responder a pergunta: **Qual é a primitiva da função f?** Não parece razoável apenas dizer que f admite infinitas primitivas. Para contornar esse problema, tome a primitiva de f desprovida de termo independente e adicione uma constante k, conhecida como **constante de integração.**

Deste modo, a primitiva de f(x) = cos x é F(x) = sen x + k, a primitiva de g(x) = 2x é $G(x) = x^2 + k$ e a primitiva de $h(x) = \frac{1}{x}$ é H(x) = ln x + k, onde todos esses k's são constante reais.

Teorema: Se f: [a, b]→IR é uma função contínua e F uma primitiva de f, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Demonstração:

Sabe-se que I(x) é a função área, ou seja, $\int_a^x f(t)dt = I(x)$ é a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo x, fazendo x variar desde x = a até um determinado x ≤ b. Sabe-se, também, que I(x) é primitiva de f, de onde se conclui que I(x) = F(x) + k, k constante real, onde F(x) é uma primitiva qualquer de f. A chave da demonstração está em observar que I(a) = 0, o que é óbvio, já que I(a) é a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo x, desde x = a até x = a!

Desta forma: F(a) + k = 0 ⇒ k = – F(a) ⇒ I(x) = F(x) – F(a)

Fazendo x = b ⇒ $\int_a^b f(x)dx = I(b) = F(b) - F(a)$

Esse teorema mostra que o problema de calcular uma área abaixo de um gráfico de uma função f reside, basicamente, em determinar uma primitiva de f. Parece fácil, porém calcular uma primitiva não é um processo tão simples quanto calcular uma derivada, onde basta aplicar as regras de derivação. Por mais que a integral possa ser interpretada como o processo inverso da derivação, a todo momento é necessário ficar se perguntando: **Qual função, quando derivada, dá a função f?** A resposta pra essa pergunta, muitas vezes, é bem complexa, como será visto mais adiante nesse capítulo.

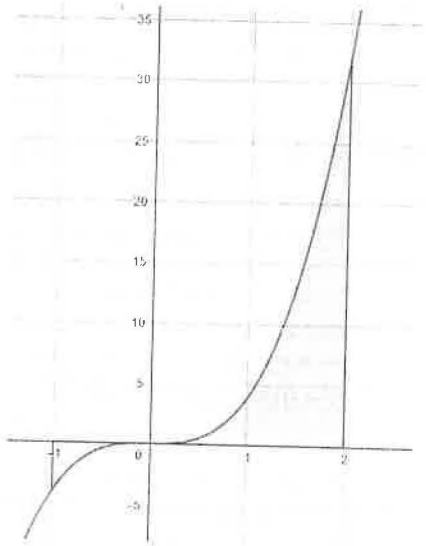
Além disso, outra pergunta que o leitor deve estar se fazendo é: **Qual primitiva F eu devo tomar?** É uma pergunta bem pertinente, pois toda função admite infinitas primitivas. A resposta é bem simples: tanto faz! Sabe-se que duas primitivas se diferenciam apenas por uma constante real. Portanto, se F e G são primitivas de uma mesma função f: F(x) = G(x) + k. Logo:

$$I(b) = F(b) - F(a) = G(b) + k - (G(a) + k) = G(b) - G(a).$$

Como tanto faz a escolha da primitiva, o aconselhável é escolher aquela em que o termo independente da variável é nulo. Por exemplo, no cálculo da integral $\int_{-1}^{2} 4x^3\,dx$, deve-se adotar x^4 como a primitiva de $4x^3$:

$$\int_{-1}^{2} 4x^3\,dx = x^4\Big|_{-1}^{2} = 2^4 - (-1)^4 = 16 - 1 = 15$$

Qual é o significado dessa integral ter dado 15? É a área compreendida pelo gráfico de $f(x) = 4x^3$ e o eixo x, quando x varia desde – 1 até 2? A resposta, nesse caso, é um retumbante **NÃO**! Observe o gráfico de $f(x) = 4x^3$:



Uma parte do gráfico de f está abaixo do eixo x e com isso a integral de – 1 até 0 é negativa. Quando foi feita a integral de – 1 a 2, a área de – 1 a 0 foi contada como sendo negativa, que é um absurdo. Nesse caso, pra não cometer esse erro, é necessário separar os cálculos das integrais acima do eixo x e abaixo do eixo x.

Abaixo do eixo x: $A_1 = -\int_{-1}^{0} 4x^3\,dx = -\left(x^4\Big|_{-1}^{0}\right) = -\left(0^4 - (-1)^4\right) = 1$

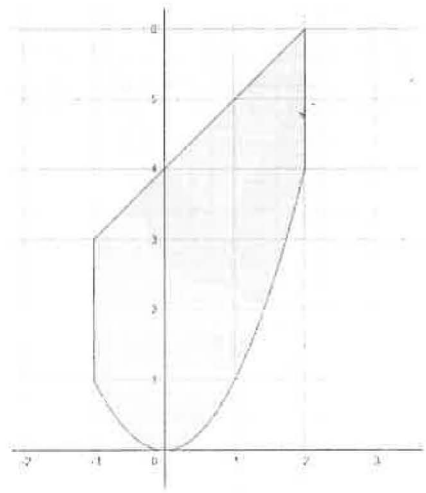
Acima.do eixo x: $A_2 = \int_{0}^{2} 4x^3\,dx = x^4\Big|_{0}^{2} = 2^4 - 0^4 = 16$

Portanto, a área compreendida entre o gráfico de $f(x) = 4x^3$, desde $x = -1$ até $x = 2$, vale $A_1 + A_2 = 1 + 16 = 17$.

3.4. ÁREAS COMPREENDIDAS POR DOIS GRÁFICOS

No item anterior aprendemos a calcular a área compreendida entre o gráfico de uma função e o eixo x. Agora vamos desenvolver uma técnica pra calcular a área compreendida entre dois gráficos de funções contínuas, desde que um dos gráficos esteja sempre acima do outro.

Suponha que f e g são duas funções contínuas cujos domínios contém o intervalo real [a, b] e, para todo $x \in [a, b]$, tem-se que $f(x) \geq g(x)$. Para calcular a área compreendida entre os gráficos de f e g basta considerar a função $h(x) = f(x) - g(x)$. Observe o exemplo abaixo, onde $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x^2$. No intervalo $-1 \leq x \leq 2$ sempre ocorre $f(x) > g(x)$ e área delimitada pelos dois gráficos pode ser calculada subtraindo a área compreendida pelo gráfico de f e o eixo da área compreendida pelo gráfico de g e o eixo x.



$$A = \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x + 4 - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 4.(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{22}{3} - \frac{(-19)}{6} = \frac{21}{2}$$

Generalizando, a área delimitada pelos gráficos das funções contínuas f e g e as retas x = a e x = b, onde $f \geq g$ para todo $x \in [a, b]$ é igual a $A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$.

É importante ressaltar que o resultado acima vale mesmo que f e/ou g tenham parte de seus gráficos abaixo do eixo x. A única restrição é que $f \geq g$ no intervalo analisado.

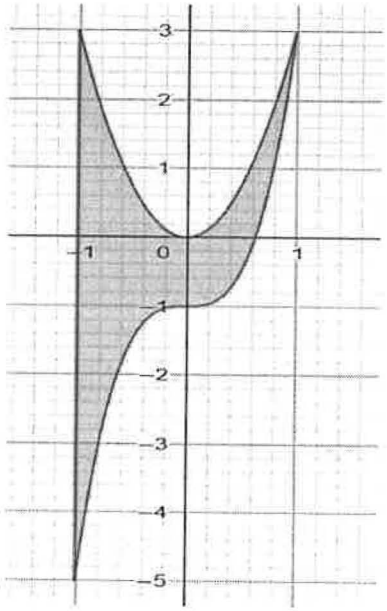
Por exemplo, considere as funções $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 4x^3 - 1$. Deseja-se calcular a área delimitada pelos gráficos de f e g e as retas verticais $x = 1$ e $x = -1$.

Perceba que:

$$f(x) - g(x) = 3x^2 - 4x^3 + 1 = (1 - x)(4x^2 + x + 1)$$

Como $1 - x \geq 0$ para $x \in [-1, 1]$ e $4x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\Delta > 0$), segue que $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo x no intervalo $[-1, 1]$.

Desta forma, pra calcular a área hachurada no gráfico abaixo, deve-se calcular a integral de $f(x) - g(x)$, com limites de integração de -1 até 1. Perceba que não importa se parte do gráfico de g(x) esteja abaixo do eixo x. Para os valores de x os quais $g(x) < 0$, a subtração $f - g$ é sempre positiva, sendo sua integral positiva e interpretada como uma área.



Portanto, a área hachurada vale:

$$A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x^3 + 1)\,dx = x^3 - x^4 + x \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1^3 - 1^4 + 1\right) - \left((-1)^3 - (-1)^4 + (-1)\right) = 1 - (-3) = 4$$

3.5. DETERMINAÇÃO DE UMA PRIMITIVA

Como foi enunciado e demonstrado no tópico sobre o teorema fundamental do cálculo, se F é uma primitiva de f, então $F'(x) = f(x)$. Deste modo, pra determinar uma primitiva de uma função f, se deve determinar uma função F de modo que sua derivada seja igual a f. O nome que se dá a esse processo é **integrar f**.

Até este momento no capítulo, todas as integrais estudadas foram do tipo $\int_a^b f(x)\,dx$, ou seja, são números associados a áreas no plano cartesiano. Quando os limites de integração estão definidos o valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número e dá-se o nome de **integral definida de f**. Contudo, quando o objetivo é apenas determinar uma primitiva de f,. não é necessário ter os limites de integração definidos. A simbologia utilizada pra primitiva é $F(x) = \int f(x)\,dx + k$, sem os limites de integração, e a nomenclatura adotada é **integral indefinida**, sendo k a **constante de integração**. Nesse caso, F(x) é uma função na variável x.

Como a operação integrar na variável x é a operação inversa de derivar em x, pode-se afirmar que:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + k$$

Pode-se citar os exemplos:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k, \quad \int e^x\,dx = e^x + k \text{ e } \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k$$

3.5.1. Propriedades da Integral Indefinida

As propriedades da integral indefinida são as mesmas propriedades da integral definida, a saber:

(1) $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(2) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Observações:

(1) A propriedade 2 também é válida para subtração de funções:

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

(2) Assim como as propriedades da integral definida, as demonstrações das propriedades da integral indefinida podem ser feitas utilizando a interpretação geométrica de integral como sendo uma área.

3.5.2. Integrais Indefinidas Elementares

Nos exemplos numéricos dos tópicos anteriores desse capítulo foram apresentadas algumas primitivas elementares, fundamentalmente de funções polinomiais, tais como $x^3 + k$ é primitiva de $3x^2$ e $x^4 + k$ é primitiva de $4x^3$. O leitor mais atento já deve ter percebido que $nx^{n-1} + k$ é primitiva de x^n, para $n \in IN^*$. Entretanto, há funções bem mais complicadas de serem integradas que funções polinomiais, onde não é possível responder automaticamente a primitiva de uma função. Abaixo segue uma listagem de primitivas elementares, que são obtidas apenas imaginando qual primitiva F tem como derivada f, utilizando a tabela do tópico 2.6, do capítulo de Derivadas. Como os casos listados abaixo são considerados elementares a aplicação é imediata, não sendo necessária, no meio de um exercício, nenhuma demonstração.

$$\int A\,dx = Ax + k, \quad A \in IR$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k, \quad r \in IR - \{-1\}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + k$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int \sec^2 x\,dx = -\operatorname{tg} x + k$$

$$\int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\cot x + k$$

$$\int \sec x.\operatorname{tg} x\,dx = \sec x + k$$

$$\int \operatorname{cossec} x.\cot x\,dx = -\operatorname{cossec} + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + k$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + k$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccot} x + k$$

Apenas pra ressaltar um dos resultados mais utilizados em exercícios de integral, a segunda primitiva da tabela, $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k$, é válida realmente pra todo expoente r real diferente de 1. Deste modo, é possível afirmar que:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k, \quad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k, \quad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + k, \quad \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k,$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + k, \quad \int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + k, \quad \int x^{\sqrt{2}}\,dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + k.$$

Qualquer integral que fuja da tabela anterior deve ser demonstrada. Existem algumas técnicas pra determinar uma primitiva não elementar, porém, não existe uma técnica universal, cada técnica deve ser usada dependendo das características da função a ser integrada. Acompanhe os próximos tópicos pra entender qual técnica usar pra cada tipo de função.

3.5.3. Integração Por Substituição

A integração por partes deve ser usada quando é possível identificar que a função a ser derivada foi obtida pela aplicação da regra da cadeia da derivada. No capítulo de derivadas foi demonstrada a regra da cadeia: $f(g(x))' = f'(g(x)).g'(x)$

Integrando os dois lados dessa identidade obtém-se:

$$\mathbf{f(g(x)) = \int f'(g(x)).g'(x)\,dx}$$

Por exemplo, digamos que se deseja calcular $\int 2x\cos(x^2)\,dx$. É possível identificar, pela regra da cadeia, que se $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ então $f'(x) = 2x.\cos(x^2)$. Assim, se pode afirmar que $\int 2x\cos(x^2)\,dx = \operatorname{sen}(x^2) + k$.

E onde aparece a substituição? No exemplo apresentado não foi necessário fazer substituição alguma, porém nem toda integral que seja aplicação da regra da cadeia fica tão evidente assim quem é $f'(g(x))$ e quem é $g'(x)$. Pra sistematizar esse método, suponhamos que g(x) seja uma nova variável: $\mathbf{u = g(x)}$.

Derivando, em x, os dois lados:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

Deste modo, a integral original se transforma em:

$$\mathbf{\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = F(u) + k}$$

O mais importante é escolher $u = g(x)$, quando possível, de modo que a integral $\int f'(u)\,du$ seja uma daquelas integrais elementares destacadas na página anterior.

O exemplo anterior pode ser refeito, agora utilizando a substituição de variáveis. Assim, pra calcular $\int 2x\cos(x^2)\,dx$ pode-se iniciar fazendo a substituição $u = x^2$. Diferenciando os dois lados, na variável x, obtém-se: $du = 2x\,dx$.

Logo, o cálculo da integral fica da forma:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + k = \operatorname{sen}(x^2) + k$$

Vamos agora aplicar essa técnica de integração nos exemplos a seguir:

(1) Pra calcular $\int \cos x\sqrt{1+\text{sen } x}\,dx$, deve-se fazer $u = 1 + \text{sen } x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

Assim: $\int \cos x\sqrt{1+\text{sen } x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + k = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\text{sen } x)^3} + k$

(2) A substituição na integral $\int \frac{\ln x}{x}dx$ é $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

Portanto: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + k = \frac{(\ln x)^2}{2} + k$

(3) Em algumas situações é interessante iniciar o cálculo aplicando uma identidade trigonométrica. Por exemplo: $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$

Fazendo $u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx$

Logo: $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos u}{4}\,du = \frac{u}{4} + \frac{\text{sen } u}{4} + k = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + k$

(4) No caso da integral $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx$, a estratégia é separar em duas integrais:

$$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{1+x-1}{(1+x)^3}dx = \int \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}dx = \int \frac{1}{(1+x)^2}dx - \int \frac{1}{(1+x)^3}dx$$

Fazendo a substituição de variáveis: $u = 1 + x \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{1}{u^2}du - \int \frac{1}{u^3}du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}$$

3.5.4. Integração Por Partes

Enquanto a integração por substituição é baseada na regra da cadeia da derivação, a integração por partes é baseada na regra da derivada do produto de duas funções, a saber:

$$(f.g)' = f'.g + f.g' \Rightarrow f.g = \int f'.g\,dx + \int f.g'dx \Rightarrow \int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'dx$$

Na prática, trocou o cálculo da integral $\int f'.g\,dx$, não elementar, pelo cálculo da integral $\int f.g'dx$, teoricamente mais simples.

Vamos mostrar a aplicação da integral por partes calculando $\int \ln x\,dx$. Fazendo $f(x) = x$ e $g(x) = \ln x$, segue que:

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'dx \Rightarrow \int 1.\ln x\,dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x.\ln x - \int 1\,dx \Rightarrow$$

$$\int \ln x\,dx = x.\ln x - x + k$$

Os exemplos resolvidos a seguir vão ajudar o leitor entender melhor a aplicação da técnica de integração por partes.

(1) Pra determinar $\int x.\text{sen } x\,dx$ pode-se fazer $f(x) = -\cos x$ e $g(x) = x$

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'dx \Rightarrow \int x.\text{sen } x\,dx = -x.\cos x - \int (-\cos x)\,dx \Rightarrow$$

$$\int x.\text{sen } x\,dx = -x.\cos x + \text{sen } x + k$$

(2) No caso de $\int x.e^x\,dx$ basta fazer $f(x) = e^x$ e $g(x) = x$

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'dx \Rightarrow \int x.e^x\,dx = x.e^x - \int e^x\,dx = x.e^x - e^x + k$$

(3) Em alguns casos é necessário aplicar a integração por partes mais de uma vez. Por exemplo, para calcular a integral $\int x^2 \cos x\,dx$ pode-se iniciar assumindo que $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = x^2$

Aplicando na fórmula da integral por partes:

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'dx \Rightarrow \int x^2.\cos x\,dx = x^2.\text{sen } x - \int 2x.\text{sen } x\,dx$$

A integral $\int x.\text{sen } x\,dx$ foi calculada no exemplo 1 e vale $-x.\cos x + \text{sen } x + k$.

Deste modo: $\int x^2 \cos x\,dx = x^2.\text{sen } x + 2x.\cos x - 2\,\text{sen } x + k$

(4) Em determinados exercícios é necessário aplicar a integração por partes e por substituição, uma de cada vez, pra chegar na primitiva. Um exemplo clássico desse caso é no cálculo de $\int \text{arc tg } x\,dx$. Vamos iniciar usando a integração por partes. Seja $f(x) = x$ e $g(x) = \text{arc tg } x$.

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'dx \Rightarrow \int \text{arc tg } x\,dx = x.\text{arc tg } x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ vamos lançar mão da integração por substituição, fazendo $u = 1 + x^2$, onde obtém-se, diferenciando os dois membros, $du = 2x\,dx$

Desta forma:

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln u + k = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$$

Substituindo na expressão da integração por partes:

$$\int \text{arc tg } x\,dx = x.\text{arc tg } x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$$

3.5.5. Integração de Funções Racionais

Por definição, função racional é toda função do tipo $\frac{F(x)}{G(x)}$, onde F(x) e G(x) são polinômios na variável x. Um polinômio é uma função da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, ..., a_n$ são denominados coeficientes do polinômio.

Se o grau de F for menor que o grau de G denominamos de **função racional própria**. Por outro lado, se o grau de F for maior ou igual que o grau de G denominamos de **função racional imprópria**. São exemplos de funções racionais próprias: $\frac{x-1}{x^2+2x+4}$ e $\frac{x^3-1}{x^3+2x-8}$. São exemplos de funções racionais impróprias: $\frac{3x^2-4x+5}{x-2}$ e $\frac{x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1}{7x^4-3x^2+4}$.

Serão desenvolvidos dois métodos pra calcular a integral de funções racionais, um método pra função racional própria e outro pra função racional imprópria.

3.5.5.1. Integração de Função Racional Própria

Quando a função racional é do tipo $\frac{F(x)}{G(x)}$, com o grau de F menor ou igual ao grau de G, a estratégia é decompor a função em uma soma de frações parciais do tipo $\frac{A}{ax+b}$ ou $\frac{A}{(ax+b)^k}$ $(k \in IN, k \geq 2)$ ou $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ $(k \in IN, k \geq 2)$, com A, B, a, b e c reais. Após decompor em frações parciais é só calcular a integral de cada expressão, utilizando o método de substituição ou a integração por partes.

Parece simples né?! Só tem um grande porém... essa decomposição em soma de frações parciais depende se as raízes de G(x) são reais ou complexas e também depende se G(x) tem raízes repetidas. Por isso, é necessário separar em 4 casos, listados e comentado a seguir.

1º caso: Todas as raízes de G(x) são reais e distintas

Nesse caso é possível decompor a função racional como uma soma de frações parciais do tipo $\frac{A}{ax+b}$. Como exemplo, vamos calcular $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$.

Inicialmente, devemos decompor $G(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$ como um produto de polinômios de 1º grau. Caso as raízes de G sejam realmente reais e distintas, isso sempre é possível!

$$G(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

As parcelas da decomposição de G são os denominadores das frações parciais:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Desenvolvendo algebricamente essa igualdade obtém-se:

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Substituindo, um por vez, $x = 0$, $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$ se conclui que $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$. Assim, já é possível calcular a integral:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \int \frac{1}{2x} + \frac{1}{5(2x-1)} - \frac{1}{10(x+2)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| + -\frac{1}{10}\ln|x+2| + k$$

2º caso: As raízes de G(x) são reais, mas algumas são repetidas

Nesse caso, pra decompor a função racional como soma de frações parciais não dá só pra usar parcelas do tipo $\frac{A}{ax+b}$, também é obrigatório usar parcelas do tipo $\frac{A_1}{cx+d}, \frac{A_2}{(cx+d)^2}, ..., \frac{A_r}{(cx+d)^r}$, onde r é a multiplicidade da raiz que repete e $x = -\frac{d}{c}$ é uma raiz que repete.

Vamos mostrar a aplicação desse caso no cálculo de $\int \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}\,dx$.

Decompondo o denominador:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1)$$

Como $x - 1$ tem expoente 2 no denominador da função racional, a decomposição em uma soma de frações parciais é da forma:

$$\frac{4x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Desenvolvendo os dois membros:

$$4x = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 = (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C)$$

Logo:

$$A + C = 0, \quad B - 2C = 4 \quad e \quad -A + B + C = 0$$

Resolvendo o sistema pra A, B e C se conclui que $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$.

Calculando a integral proposta:

$$\int \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + k$$

Nada impede de G(x) tenha mais de um raiz múltipla. Nesse caso, na decomposição do denominado é necessário usar parcelas do tipo $\frac{A_r}{(cx+d)^r}$ pra cada raiz que repete.

3º caso: As raízes de G(x) não são todas reais

Nesse caso, como os coeficientes de G(x) são reais, as raízes não reais de G(x) são pares de números complexos conjugados, implicando que esses pares são raízes de equações de 2º grau do com coeficientes reais. Deste modo, além de parcelas do tipo $\frac{A}{ax+b}$, a decomposição da função racional em frações parciais também terá pelo menos uma parcela do tipo $\frac{Bx+c}{cx^2+dx+e}$.

Vamos a um exemplo pra analisar a aplicação do método. Suponha que se deseja calcular $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$. A decomposição do denominador vale:

$x^3 + x = x(x^2+1)$, onde $x^2 + 1$ tem raízes não reais

Como explanado anterior, a decomposição em frações parciais, nesse caso, é:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow 1 = A(x^2+1) + (Bx+C) = (A+B)x^2 + Cx + A - 1 \Rightarrow$$

$$A + B = 0,\ C = 0 \text{ e } A - 1 = 0 \Rightarrow A = 1,\ B = -1 \text{ e } C = 0$$

Resolvendo a integral: $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$

4º caso: As raízes de G(x) não são todas reais e há raízes múltiplas não reais

Esse caso é uma espécie de interseção do 2º e 3º casos. A decomposição da função racional terá parcelas do tipo $\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}$, $\frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$, ... pra cada par de raízes complexas conjugadas.

Como exemplo, considere a integral $\int \frac{-x^3+2x^2-x+1}{x^5+2x^3+x}\,dx$.

Decompondo o denominador: $x^5 + 2x^3 + x = x(x^2+1)^2$

Assim, a decomposição em frações parciais é da forma:

$$\frac{-x^3+2x^2-x+1}{x^5+2x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \Rightarrow$$

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A \Rightarrow$$

$$A + B = 0,\ C = -1,\ 2A + B + D = 2,\ C + E = -1,\ A = 1 \Rightarrow$$

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -1,\ D = 1 \text{ e } E = 0$$

Logo: $\int \frac{-x^3+2x^2-x+1}{x^5+2x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx =$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \text{arc tg}\,x - \frac{1}{2(x^2+1)} + k$$

3.5.6. Integração de Funções Trigonométricas

Nesse tópico vamos estudar como calcular integrais trigonométricas dos tipos $\int \text{sen}^n x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$, $\int \text{sen}^n x.\cos^m x\,dx$, $\int \text{tg}^n x.\sec^m x\,dx$ ou $\int \text{sen}\,nx.\cos mx\,dx$.

Independentemente da situação, algumas identidades trigonométricas são utilizadas e é importante destaca-las:

$$\mathbf{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 x}$$

$$\mathbf{\text{sen}\,2x = 2\text{sen}\,x.\cos x}$$

$$\mathbf{1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x}$$

Como cada situação tem uma estratégia diferente de cálculo, será necessário analisar caso a caso.

1º caso: $\int \text{sen}^n x\,dx$ ou $\int \cos^n x\,dx$

Pra ajudar a construir uma estratégia de cálculo que valha pra todo n, vamos resolver dois exemplos numéricos.

(a) $\int \text{sen}^4 x\,dx$

Inicialmente, deve-se encontrar uma expressão equivalente a $\text{sen}^4 x$ que não envolva potências de funções trigonométricas:

$$\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

Logo: $\int \text{sen}^4 x\,dx = \int \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\text{sen}\,2x}{4} + \frac{\text{sen}\,4x}{32} + k$

(b) $\int \cos^5 x\,dx$

Como o expoente é ímpar, deve-se tirar cos x em evidência pra depois desenvolver $\cos^4 x$ em função de potências de sen x.

$\cos^5 x = (\cos^2 x)^2.\cos x = (1 - \text{sen}^2 x)^2.\cos x = (1 - 2\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x).\cos x =$

$= \cos x - 2.\text{sen}^2 x.\cos x + \text{sen}^4 x.\cos x$

Fazendo $u = \text{sen}\,x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos x - 2\text{sen}^2 x.\cos x + \text{sen}^4 x.\cos x\,dx = \int 1 - 2u^2 + u^4\,du =$

$$= u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = \text{sen}\,x - \frac{\text{sen}^3 x}{3} + \frac{\text{sen}^5 x}{5} + k$$

A análise dos dois exemplos resolvidos permite generalizar o procedimento do cálculo de $\int \text{sen}^n x\,dx$ ou $\int \cos^n x\,dx$.

(1) $\int \text{sen}^n x\,dx$

Se n par, deve-se substituir, seguidamente, $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$ até obter $\text{sen}^n x$ em função de cos 2x, cos 4x, cos 6x, ...

Se n ímpar, faça $\text{sen}^n x = \text{sen}^{n-1} x.\text{sen}\, x$ e desenvolva $\text{sen}^{n-1} x$ em função de $\cos^2 x$, $\cos^4 x$, $\cos^6 x$, ..., usando várias vezes $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Por fim, faça $u = \cos x$ e use integração por substituição.

(2) $\int \cos^n x\,dx$

Se n par, deve-se substituir, seguidamente, $\cos^2 x = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}$ até obter $\cos^n x$ em função de cos 2x, cos 4x, cos 6x, ...

Se n ímpar, faça $\cos^n x = \cos^{n-1} x.\cos x$ e desenvolva $\cos^{n-1} x$ em função de $\text{sen}^2 x$, $\text{sen}^4 x$, $\text{sen}^6 x$, ..., usando várias vezes $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$. Por fim, faça $u = \text{sen}\, x$ e use integração por substituição.

2º caso: $\int \text{sen}^n x.\cos^m x\,dx$

Vamos analisar alguns exemplos numéricos pra depois gerar um procedimento padrão.

(a) $\int \text{sen}^5 x.\cos^2 x\,dx$

$\text{sen}^5 x.\cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2.\text{sen}\, x.\cos^2 x = (1 - \cos^2 x)^2.\cos^2 x.\text{sen}\, x =$
$= (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\text{sen}\, x$
Fazendo $u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen}\, x\,dx$
$\int \text{sen}^5 x.\cos^2 x\,dx = \int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\text{sen}\, x\,dx = \int -u^2 + 2u^4 - u^6\,du =$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + k$$

(b) $\int \text{sen}^4 x.\cos^2 x\,dx$

$$\text{sen}^4 x.\cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2.\cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) =$$

$$= \frac{(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x)}{8} = \frac{\cos^3 2x - \cos^2 2x - \cos 2x + 1}{8}$$

Pra facilitar o cálculo, vamos usar as fórmulas:

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \quad \text{e} \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Deste modo: $\text{sen}^4 x.\cos^2 x = \dfrac{\frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} - \frac{\cos 4x - 1}{2} - \cos 2x + 1}{8} =$

$$= \frac{-2\cos 4x + \cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x + 6}{32}$$

$$\int \text{sen}^4 x.\cos^2 x\,dx = \int \frac{-2\cos 4x + \cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x + 6}{32}\,dx =$$

$$= -\frac{\text{sen}\,4x}{64} + \frac{\text{sen}\,3x}{96} - \frac{\text{sen}\,2x}{16} + \frac{3\,\text{sen}\,x}{32} + \frac{3x}{16} + k$$

(c) $\int \text{sen}^3 x.\cos^5 x\,dx$

$\text{sen}^3 x.\cos^5 x = \text{sen}^2 x.\cos^5 x.\text{sen}\, x = (1 - \cos^2 x).\cos^5 x.\text{sen}\, x = (\cos^5 x - \cos^7 x).\text{sen}\, x$
Fazendo $u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen}\, x\,dx$

$$\int \text{sen}^3 x.\cos^5 x\,dx = \int (\cos^5 x - \cos^7 x)\text{sen}\, x\,dx = \int u^5 - u^7\,du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + k =$$

$$= \frac{\cos^6 x}{6} - \frac{\cos^8 x}{8} + k$$

Observando os exemplos resolvidos, vamos estabelecer um padrão pro cálculo da uma integral do tipo $\int \text{sen}^n x.\cos^m x\,dx$

(1) Se m e n forem pares, deve-se escrever $\text{sen}^n x.\cos^m x$, usando a identidade $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 - 1$, em função apenas de cos x, cos 2x, cos 4x, cos 6x, ...

Pra finalizar, basta usar que a primitiva de cos kx é $\frac{\text{sen}\,kx}{k}$.

(2) Se m e n forem ímpares, deve-se tirar em evidência sen x ou cos x, normalmente o associado ao menor dos números n e m (adote que seja sen x), e desenvolver o termo $\text{sen}^{n-1} x$, usando a relação fundamental da trigonometria, até obter um polinômio em cos x. Fazendo $u = \text{sen}\, x$ use a integração por substituição. Se o menor entre n e m for m é só inverter sen x e cos x no processo.

(3) Se ou m ou n são ímpares (adote n ímpar e m par), deve-se iniciar tirando em evidência sen x e depois desenvolver as parcelas restantes até encontrar um polinômio em cos x, usando a relação fundamental da trigonometria. Fazendo $u = \text{sen}\, x$ use a integração por substituição. Se n for par e m ímpar, é só inverter sen x e cos x no processo.

3º caso: $\int tg^n x.sec^m x\ dx$

Mais uma vez vamos avaliar a solução de alguns exercícios pra depois enunciar uma generalização.

(a) $\int tg^5 x.sec^2 x\ dx$

Fazendo $u = tg\ x \Rightarrow du = sec^2 x\ dx$

Logo: $\int tg^5 x.sec^2 x\ dx = \int u^5\ du = \frac{u^6}{6} + k = \frac{tg^6 x}{6} + k$

(b) $\int tg\,x.sec^5 x\ dx$

Inicialmente, fatoremos a expressão original na forma: $tg\ x.sec^5 x = sec^4 x.sec\ x.tg\ x$

Fazendo $u = sec\ x \Rightarrow du = sec\ x.tg\ x\ dx$

Assim: $\int tg\,x.sec^5 x\ dx = \int u^4\ du = \frac{u^5}{5} + k = \frac{sec^5 x}{5} + k$

(c) $\int tg^3 x\ dx$

Aplicando identidades trigonométricas:

$tg^3 x = tg\ x.tg^2 x = (sec^2 x - 1)tg\ x = sec^2 x.tg\ x - tg\ x$

$\int tg^3 x\ dx = \int (sec^2 x.tg\,x - tg\,x)\ dx = \int sec^2 x.tg\,x\ dx - \int \frac{sen\,x}{cos\,x}\ dx$

Fazendo $u = tg\ x \Rightarrow du = sec^2 x\ dx$ e $v = cos\ x \Rightarrow dv = -sen\ x\ dx$

Então: $\int tg^3 x\ dx = \int u\ du + \int \frac{1}{v}\ dv = \frac{u^2}{2} + \ln|v| + k = \frac{tg^2 x}{2} + \ln|cos\,x| + k$

(d) $\int sec^4 x\ dx$

Aplicando identidades trigonométricas:

$sec^4 x = sec^2 x.sec^2 x = (1 + tg^2 x).sec^2 x = sec^2 x + tg^2 x.sec^2 x$

Fazendo $u = tg\ x \Rightarrow du = sec^2 x\ dx$

Assim:

$\int sec^4 x\ dx = \int sec^2 x\ dx + \int tg^2 x.sec^2 x\ dx = tg\,x + \int u^2\ du = tg\,x + \frac{u^3}{3} + k =$

$= tg\,x + \frac{tg^3 x}{2} + k$

Da análise dos exemplos apresentados já é possível descrever um procedimento para calcular $\int tg^n x.sec^m x\ dx$

(1) Se m é par, deixe em evidência $sec^2 x$ e na expressão restante faça a substituição $sec^2 x = 1 + tg^2 x$. Por fim, faça $u = tg\ x$ pra transformar a integral trigonométrica em uma integral polinomial;

(2) Se n é ímpar, tire em evidência sec x.tg x e substitua, na expressão restante, $tg^2 x = sec^2 x - 1$. Faça $u = sec\ x$ pra transformar a integral trigonométrica numa integral polinomial;

(3) Se m é ímpar ou n é par, não existe uma regra geral, dependendo dos valores de m e n.

4º caso: $\int sen\ nx.cos\ mx\ dx$

Nesse caso, há uma regra geral, independentemente dos valores de m e n. A estratégia é utilizar as fórmulas de transformação de produto em soma, a saber:

$$sen\ mx.cos\ nx = \frac{sen(m-n)x + sen(m+n)x}{2}$$

$$sen\ mx.sen\ nx = \frac{cos(m-n)x - cos(m+n)x}{2}$$

$$cos\ mx.cos\ nx = \frac{cos(m-n)x + cos(m+n)x}{2}$$

Por exemplo, vamos calcular o valor de $\int cos\,4x.cos\,x\ dx$.

Pelas fórmulas de transformação de produto em soma:

$$cos\,4x.cos\,x = \frac{cos(4-1)x + cos(4+1)x}{2} = \frac{cos\,3x + cos\,5x}{2}$$

Assim: $\int cos\,4x.cos\,x\ dx = \frac{1}{2}\int cos\,3x + cos\,5x\ dx = \frac{sen\,3x}{6} + \frac{sen\,5x}{10} + k$

Analogamente, pra calcular $\int sen\,3x.cos\,6x\ dx$ deve-se fazer:

$$sen\,3x.cos\,6x = \frac{cos(3-6)x - cos(3+6)x}{2} = \frac{cos\,3x - cos\,9x}{2}$$

Portanto: $\int sen\,3x.cos\,6x\ dx = \frac{1}{2}\int cos\,3x - cos\,9x\ dx = \frac{sen\,3x}{6} - \frac{sen\,9x}{18} + k$

3.5.7. Integração Usando Substituições Trigonométricas

Integrais envolvendo raízes quadradas de expressões polinomiais são sempre bem complicadas de serem resolvidas. Já vimos, nesse capítulo, como resolver alguns tipos dessas integrais usando integração por substituição e integração por partes. Agora, vamos verificar como fazer substituições trigonométricas pra resolver determinados tipos de integrais onde a variável apareça dentro de uma raiz quadrada. O objetivo da substituição trigonométrica é fazer sumir a raiz quadrada, facilitando o cálculo da integral

Antes de desenvolver a teoria, é importante relembrar as identidades trigonométricas que serão a base das substituições trigonométricas.

(1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sqrt{1-\text{sen}^2 x} = |\cos x|$ e $\sqrt{1-\cos^2 x} = |\text{sen } x|$

(2) $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \Rightarrow \sqrt{1+\text{tg}^2 x} = |\sec x|$ e $\sqrt{\sec^2 x - 1} = |\text{tg } x|$

Note que em qualquer uma dessas substituições a raiz quadrada foi trocada pelo módulo de uma função trigonométrica simples.

Vamos agora calcular a integral $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$ utilizando substituição trigonométrica. Fazendo $x = 2.\text{sen }\theta \Rightarrow dx = 2.\cos\theta\,d\theta$. Como $x \in [-2, 2]$, segue que $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalo onde $|\cos\theta| = \cos\theta$.

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx = \int (2.\text{sen}\,\theta)^3\sqrt{4-4\text{sen}^2\theta}.2.\cos\theta\,d\theta = 32\int \text{sen}^3\theta.\cos^2\theta\,d\theta$$

Fazendo $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\text{sen}\,\theta\,d\theta$.

$$\int \text{sen}^3\theta.\cos^2\theta\,d\theta = \int (1-\cos^2\theta).\cos^2\theta.\text{sen}\,\theta\,d\theta = \int -u^2 + u^4\,du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k$$

Pra encontrar a resposta final é necessário desfazer as duas substituições feitas:

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{32u^3}{3} + \frac{32u^5}{5} + k = -\frac{32\cos^3\theta}{3} + \frac{32\cos^5\theta}{5} + k =$$

$$= -\frac{32\sqrt{(1-\text{sen}^2\theta)^3}}{3} + \frac{32\sqrt{(1-\text{sen}^2\theta)^5}}{5} + k = \frac{32\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + \frac{32\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} + k$$

A análise desse exemplo permite uma generalização:

(1) Se a expressão for $\sqrt{a^2-x^2}$ a substituição é $x = a.\text{sen}\,\theta$, com $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$;

(2) Se a expressão for $\sqrt{a^2+x^2}$ a substituição é $x = a.\text{tg}\,\theta$, com $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$;

(3) Se a expressão for $\sqrt{x^2-a^2}$ a substituição é $x = a.\sec\theta$, com $0 \le u \le \pi/2$ ou $\pi \le u \le 3\pi/2$.

Vamos agora aplicar o método da substituição trigonométrica pra calcular a integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^3}}\,dx$. De acordo com a teoria apresentada, a substituição mais adequada é $x = \frac{3}{2}\text{tg}\,\theta$, onde obtém-se que $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^3}}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}\text{tg}^3\theta}{27\sec^3\theta}\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\int \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{3}{4}\int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\text{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{3}{4}\int\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right).\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

Fazendo $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\text{sen}\,\theta\,d\theta$:

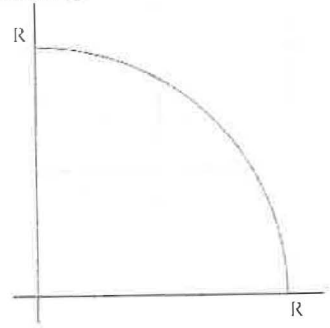
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^3}}\,dx = \frac{3}{4}\int 1 - \frac{1}{u^2}\,du = \frac{3}{4}\left(u + \frac{1}{u}\right) + k$$

Desfazendo as substituições:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^3}}\,dx = \frac{3}{4}\left(\cos 0 + \frac{1}{\cos\theta}\right) + k = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sec\theta} + \sec 0\right) + k =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}} + \sqrt{1+\text{tg}^2\theta}\right) + k = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{4x^2+9}} + \frac{\sqrt{4x^2+9}}{3}\right) + k$$

Pra finalizar esse tópico, vamos apresentar uma aplicação de substituição trigonométrica pra calcular a área do círculo de raio R. Sabe-se que a equação, no plano cartesiano, da circunferência centrada na origem e raio R é $x^2 + y^2 = R^2$. De forma que seja possível associar uma função à essa equação, vamos restringir ao primeiro quadrante, onde a área compreendida pelo gráfico da circunferência e o eixo x equivale a um quarto do círculo:



Como no primeiro quadrante as coordenadas são positivas, a função que representa o quarto de circunferência é $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, com domínio em [0, R] e contradomínio em [0, R]. Desta forma, a área do círculo é igual a quatro vezes a área delimitada pelo gráfico de f e os eixos coordenados:

$$S=4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

Fazendo $x = R\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = R\cos\theta\, d\theta$.

Perceba também que para $x = 0$ tem-se $\theta = 0$ e para $x = R$ tem-se $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo, a integral definida fica da forma:

$$S=4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2-R^2\operatorname{sen}^2\theta}.R\cos\theta\,d\theta = 4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

Aplicando a identidade trigonométrica $\cos^2\theta=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$:

$$S=4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 2R^2\int_0^{\pi/2}(\cos 2\theta+1)\,d\theta = 2R^2\left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}+\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)=$$

$$=2R^2\left(\frac{\operatorname{sen}\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\operatorname{sen}0}{2}-0\right)=\pi R^2$$

Exercícios Resolvidos

01) (EFOMM-95) Sabendo que $f'(x)=\frac{x+2}{x^2+4x+11}$ e que $f(1)=0$, então o valor de $f(0)$ é:

(A) $\ln\left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ (B) $\frac{\ln\sqrt{11}}{\ln 4}$ (C) $\ln(4\sqrt{11})$ (D) $\frac{\ln 4}{\ln\sqrt{11}}$ (E) $\sqrt{11}\ln 4$

Solução: Alternativa A

Seja $u = \ln(x^2+4x+11) \Rightarrow du = 2\frac{x+2}{x^2+4x+11}dx$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{x+2}{x^2+4x+11}\,dx=\int\frac{1}{2}\,du=\frac{u}{2}+k=\ln\sqrt{x^2+4x+11}+k$$

$f(1)=0 \Rightarrow 0=k+\ln 4 \Rightarrow k=-\ln 4 \Rightarrow f(x)=\ln\sqrt{x^2+4x+11}-\ln 4$

$$f(0)=\ln\sqrt{11}-\ln 4=\ln\frac{\sqrt{11}}{4}$$

02) O valor de $\int_1^e \frac{3\sqrt{4-\ln x}}{2x}dx$ é

a) $6\sqrt{3}-3$ b) $8-3\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}-3$ d) $6-3\sqrt{3}$ e) $8\sqrt{3}-6$

Solução: Alternativa B

Se $u=(4-\ln x)^{3/2} \Rightarrow du=-\frac{3(4-\ln x)^{1/2}}{2x}dx$

Para $x = 1$ tem-se $u = 4^{3/2} = 8$ e para $x = e$ tem-se $u = 3^{3/2} = 3\sqrt{3}$

Deste modo: $\int_1^e \frac{3\sqrt{4-\ln x}}{2x}dx=\int_8^{3\sqrt{3}} -1\,du=-u\Big|_8^{3\sqrt{3}}=8-3\sqrt{3}$

03) (EFOMM-96) Resolvendo $\int_0^1 x\sqrt{3-x^2}\,dx$, encontramos:

(A) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3}$ (C) $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

(D) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ (E) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$

Solução: Alternativa A

Fazendo $u = (3-x^2)^{3/2}$ segue que $du = -3x\sqrt{3-x^2}\,dx$

Para $x = 0$ tem-se $u = 3\sqrt{3}$ e para $x = 1$ tem-se $u = 2\sqrt{2}$

Desta forma: $\int_0^1 x\sqrt{3-x^2}dx=\int_{3\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} -\frac{1}{3}\,dx=-\frac{u}{3}\Big|_{3\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}$

04) (IME-67) Calcule $\lim_{y\to a}\frac{ay}{y-a}\int_a^y e^x\,dx$. Obs: a é uma constante; e é a base dos logaritmos neperianos.

Solução:

Vamos calcular, inicialmente, o valor da integral: $\int_a^y e^x\,dx=e^x\Big|_a^y=e^y-e^a$

Assim, o limite a ser calculado fica na forma: $\lim_{y\to a} ay\frac{e^y-e^a}{y-a}=a.\lim_{y\to a} y.\lim_{y\to a}\frac{e^y-e^a}{y-a}$

O primeiro limite é bastante imediato: $\lim_{y\to a} y=a$

O segundo limite, é igual à derivada de $f(x)=e^x$ no ponto a $\lim_{y\to a}\frac{e^y-e^a}{y-a}=f'(a)=e^a$

Assim: $\lim_{y\to a}\frac{ay}{y-a}\int_a^y e^x\,dx=a^2e^a$

05) A integral $\int_1^e 3x^2 \ln(x)\,dx$ é igual a

a) $\frac{2e+1}{3}$ b) $\frac{2e^2+1}{3}$ c) $\frac{2e^3+1}{3}$ d) $\frac{2e^4+1}{3}$ e) $\frac{2e^5+1}{3}$

Solução: Alternativa C

Pra calcular a integral solicitada vamos aplicar a integração por partes.

Fazendo $f(x) = x^3$ e $g(x) = \ln x$, segue que:

$$I = \int_1^e f'.g\,dx = f.g - \int_1^e f.g'dx \Rightarrow$$

$$I = \int_1^e 3x^2.\ln x\,dx = x^3.\ln x - \int_1^e x^3.\frac{1}{x}\,dx = x^3.\ln x - \int_1^e x^2\,dx \Rightarrow$$

$$I = x^3.\ln x - \frac{x^3}{3}\Big|_1^e = \left(e^3 \ln e - \frac{e^3}{3}\right) - \left(1^3.\ln 1 - \frac{1^3}{3}\right) = e^3 - \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2e^3+1}{3}$$

06) (IME-54) Sendo dado $y\,dx = \frac{x^3-8}{8+4x-x^2}\,dy$, exprimir y em termos finitos de x, sabendo-se que para x = 0, y = 0,5.

Solução:

$$y\,dx = \frac{x^3-8}{8+4x-x^2}\,dy \Rightarrow \int \frac{8+4x-x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy$$

Vamos escrever $\frac{8+4x-x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$ como uma soma de frações parciais:

$$\frac{8+4x-x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

Logo: $A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2) = (A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + 4A - 2C$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A-2B+C=4 \\ 4A-2C=8 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ B = -2 \text{ e } C = -2$$

$$\int \frac{8+4x-x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy \Rightarrow \int \frac{1}{x-2} - \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy \Rightarrow$$

$$\ln(x-2) - \ln(x^2+2x+4) = \ln y + k \Rightarrow \ln\frac{x-2}{x^2+2x+4} = \ln y + k \Rightarrow$$

$$y = \frac{x-2}{x^2+2x+4} + k'$$

Para x = 0 tem-se y = 0,5: $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + k' \Rightarrow k' = 1 \Rightarrow y = \frac{x-2}{x^2+2x+4} + 1$

07) (EFOMM-95) A solução de $\int \frac{e^{3y}}{\sqrt[3]{e^{3y}+3}}\,dy$ é:

(A) $\frac{1}{2}(e^{3y}+3)^{3/2} + C$ (B) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(e^{3y}+3)^2} + C$ (C) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(e^{3y}+3)^2} + C$

(D) $\frac{1}{3}(e^{3y}+3)^{3/2} + C$ (E) $\frac{1}{2}(e^{3y}+3)^{-2/3} + C$

Solução: Alternativa C

Se $u = (e^{3y}+3)^{2/3}$ então $du = \frac{2}{3}\frac{3e^{3y}}{\sqrt[3]{e^{3y}+3}}\,dy = \frac{2e^{3y}}{\sqrt[3]{e^{3y}+3}}\,dy$

Portanto: $\int \frac{e^{3y}}{\sqrt[3]{e^{3y}+3}}\,dy = \int \frac{1}{2}du = \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(e^{3y}+3)^2} + C$

08) A integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ é igual a

a) π/4 b) π/2 c) π d) 3π/2 e) 2π

Solução: Alternativa A

Fazendo $x = \text{sen}\,\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\,d\theta$

Para x = 0 tem-se θ = 0 e para x = 1 tem-se θ = π/2

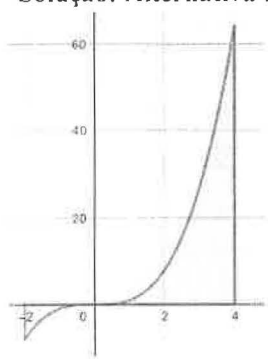
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\text{sen}^2\theta}.\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{4}+0\right) - (0+0) = \frac{\pi}{4}$$

09) (EFOMM-96) A área limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo dos x e pelas retas x = −2 e x = 4 é:

(A) 38 u.a. (B) 60 u.a. (C) 65 u.a. (D) 68 u.a. (E) 86 u.a.

Solução: Alternativa D



Parte do gráfico de $y = x^3$ está abaixo do eixo x, fazendo com que a integral de −2 a 0 seja negativa.

Assim, a área total vale:

$$S = -\int_{-2}^0 x^3\,dx + \int_0^4 x^3\,dx = -\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^0\right) + \left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^4\right) =$$

$$= -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right) - \left(\frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = 4 + 64 = 68$$

10) Calcule o valor de $\int tg^3 x.sec^4 x\, dx$.

Solução:

Aplicando identidades trigonométricas:

$tg^3 x.sec^4 x = tg^3 x.sec^2 x.sec^2 x = tg^3 x.(1 + tg^2 x).sec^2 x = tg^3 x.sec^2 x + tg^5 x.sec^2 x$

Fazendo $u = tg\, x \Rightarrow du = sec^2 x\, dx$

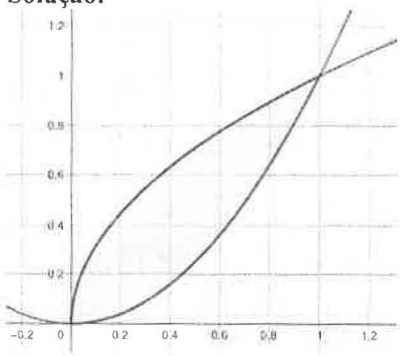
Assim:

$$\int tg^3 x.sec^4 x\, dx = \int tg^3 x.sec^2 x\, dx + \int tg^5 x.sec^2 x\, dx = \int u^3\, du + \int u^5\, du =$$

$$= \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + k = \frac{tg^4 x}{4} + \frac{tg^6 x}{6} + k$$

11) Calcule a área compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Solução:



De início deve-se determinar os pontos de interseção entre os gráficos de f e g, que é equivalente a resolver o sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 1$$

Assim, os pontos de interseção dos gráficos de f e g são (0, 0) e (1, 1).

Como o gráfico de g, no intervalo (0, 1) está sempre acima do gráfico de f, a área da região sombreada vale:

$$S = \int_0^1 (g - f)\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1\right) - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

12) Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

Solução:

Fazendo $g(x) = e^x$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$ e aplicando na integral por partes:

$\int f'.g\, dx = f.g - \int f.g'\, dx \Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

Fazendo agora $h(x) = \cos x$ e aplicando novamente na integral por partes:

$\int h'.g\, dx = h.g - \int h.g'\, dx \Rightarrow -\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx \Rightarrow$

$-\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow$

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + k$$

13) (IME-74) Sejam f: IR→IR e g: IR→IR. Definimos min(f, g) como a função h: IR→IR tal que: $h(x) = \min(f(x), g(x))$, $\forall x \in IR$. Se $f(x) = x^2 + 8$ e $g(x) = 6x$, $\forall x \in IR$, calcule $I = \int_1^5 h(x)\, dx - \int_2^3 f(x)\, dx$.

Solução:

Inicialmente, vamos resolver a inequação $f(x) \geq g(x)$:

$x^2 + 8 \geq 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

De acordo com os intervalos de integração da primeira integral:

se $1 \leq x \leq 2$: $h(x) = g(x)$, se $2 < x \leq 4$: $h(x) = f(x)$, se $4 < x \leq 5$: $h(x) = g(x)$

$$I = \int_1^5 h(x)\, dx - \int_2^3 f(x)\, dx = \int_1^2 6x\, dx + \int_2^4 (x^2 + 8)\, dx + \int_4^5 6x\, dx - \int_2^3 (x^2 + 8)\, dx =$$

$$= 3x^2\Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} + 8x\Big|_2^4\right) + 3x^2\Big|_4^5 - \left(\frac{x^3}{3} + 8x\Big|_2^3\right) =$$

$$= 3(4 - 1) + \frac{64}{3} + 32 - \frac{8}{3} - 16 + 3(25 - 16) - \left(\frac{27}{3} + 24 - \frac{8}{3} - 16\right) =$$

$$= 44 + \frac{37}{3} = \frac{169}{3}$$

14) (IME-67) Seja a função F definida por $F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \leq 1 \\ |3x - 5|, & x > 1 \end{cases}$.

Sabe-se que:

i) A função F é contínua sobre seu conjunto de definição.

ii) $\int_0^1 F(x)\, dx = 1{,}5$

iii) A função primeira derivada de F é descontínua apenas em um número do conjunto dos reais.

Pede-se determinar os números a, b, c.

Solução:

F contínua $\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^+} F(x) \Rightarrow a + b + c = 2$ (1)

$$\int_0^1 F(x)\, dx = \int_0^1 ax^2 + bx + c\, dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\Big|_0^1\right) = 1{,}5 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 1{,}5 \Rightarrow 2a + 3b + 6c = 9 \quad (2)$$

Como há uma descontinuidade de F' em x = 5/3, então F' é contínua em x = 1:

$\lim_{x \to 1^-} F'(x) = \lim_{x \to 1^+} F'(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} 2ax + b = \lim_{x \to 1^+} -3 \Rightarrow 2a + b = -3$ (3)

Resolvendo o sistema linear formado pelas equações (1), (2) e (3) encontra-se:

$a = -6$, $a = 9$ e $a = -1$

15) (IME/CG-07) Considere a equação integral dada por

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtenha a forma matemática explícita para f(x) e o valor da constante real c, sabendo que f(x) é integrável no domínio real.

Solução:

Seja F(x) uma primitiva de f(x), ou seja, F'(x) = f(x).

Derivando, na variável x, os dois membros da equação integral:

$f(x) = -x^2 f(x) + 2x^{15} + 2x^{17} \Rightarrow (1 + x^2)f(x) = 2x^{15}(1 + x^2) \Rightarrow f(x) = 2x^{15}$

Vamos agora calcular as integrais da equação original:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c \Leftrightarrow$$

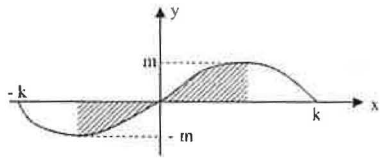
$$\int_0^x 2x^{15}\,dt = \int_x^1 2t^{17}\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c \Leftrightarrow \left(\frac{t^{16}}{8}\Big|_0^x\right) = \left(\frac{t^{18}}{9}\Big|_x^1\right) + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c \Rightarrow$$

$$\frac{x^{16}}{8} = \frac{1}{9} - \frac{x^{18}}{9} + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{9}$$

16) (IME/CG-11) A figura representa, para o intervalo $-k \le x \le k$, o gráfico de uma função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c e d são números reais. Determine, em função de k e m:

a) A equação da função representada na figura.

b) O valor da área hachurada.



Solução:

a) Como as raízes de f são ± k e 0, então $f(x) = a(x - k)(x + k)x = ax^3 - ak^2x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 - ak^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{k}{\sqrt{3}}$$

Como $f_{max} = m$, então $f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = m \Rightarrow \frac{ak^3}{3\sqrt{3}} - \frac{ak^3}{\sqrt{3}} = m \Rightarrow a = -\frac{3\sqrt{3}m}{2k^3}$

Logo: $f(x) = -\frac{3\sqrt{3}m}{2k^3}(x^3 - k^2x)$

b) Como as duas áreas hachuradas são iguais:

$$S = 2\int_0^{\frac{k}{\sqrt{3}}} f(x)\,dx = -\frac{3\sqrt{3}m}{k^3}\int_0^{\frac{k}{\sqrt{3}}} x^3 - k^2x\,dx = -\frac{3\sqrt{3}m}{k^3}\left(\frac{x^4}{4} - k^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{k/\sqrt{3}}\right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}m}{k^3}\left(\frac{k^4}{36} - \frac{k^4}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}mk}{12}$$

17) (IME/CG-14) Mostre que $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^{2x})\cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right)}{e^x(1+x^2+x^4)}\,dx = 0$.

Solução:

Considere a função $f(x) = \frac{(1+e^{2x})\cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right)}{e^x(1+x^2+x^4)} = \frac{(1+e^{2x})\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{e^x(1+x^2+x^4)}$

Observe que:

$$f(-x) = \frac{(1+e^{-2x})\operatorname{sen}\frac{(-x)}{2}}{e^{-x}[1+(-x)^2+(-x)^4]} = \frac{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right)\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{e^x}(1+x^2+x^4)} = -\frac{(1+e^{2x})\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{e^x(1+x^2+x^4)} = -f(x)$$

Como a função é ímpar, então:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^{\pi} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

18) (IME/CG-14) Calcule o valor da integral $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$.

Solução:

Se $I = \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ então $2I = \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} 2x\,dx$.

Fazendo $g(x) = e^x$ e $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ e aplicando na integral por partes:

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'dx \Rightarrow 2\int e^x \cos 2x\,dx = e^x \operatorname{sen} 2x - \int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx$$

Fazendo agora $h(x) = \cos 2x$ e aplicando novamente na integral por partes:

$$\int h'.g\,dx = h.g - \int h.g'dx \Rightarrow -2\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = e^x \cos 2x - \int e^x \cos 2x\,dx \Rightarrow$$

$$-2\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = e^x \cos 2x - \frac{e^x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2}\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{e^x \operatorname{sen} 2x}{2} - e^x \cos 2x \Rightarrow \int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x}{5}$$

Assim: $2I = \frac{e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x}{5}\Big|_0^{\pi} = \frac{-2e^{\pi}.1 + 2.e^0.1}{5} \Rightarrow I = \frac{1 - e^{\pi}}{5}$

19) (IME/CG-22) Calcule o valor da integral indefinida

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-4x+4)}\,dx$$

Solução:

A forma de resolver essa integral é dividindo em soma de frações parciais.

Como $x^2 - 4x + 5 = 0$ não tem raízes reais e $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ tem raízes reais repetidas, a única forma de escrever $\frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-4x+4)}$ como soma de frações parciais é:

$$\frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-4x+4)} = \frac{Ax+B}{x^2-4x+5} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x^2-4x+4}$$

Desenvolvendo:

$1 = (Ax + B)(x^2 - 4x + 4) + C(x^2 - 4x + 5)(x - 2) + D(x^2 - 4x + 5) =$

$= (A + C)x^3 + (-4A + B - 6C + D)x^2 + (4A - 4B - 13C - 4D)x + 4B - 10C + 5D$

Assim, devemos resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -4A+B-6C+D=0 \\ 4A-4B-13C-4D=0 \\ 4B-10C+5D=1 \end{cases}$$

A solução do sistema ficará a cargo do leitor, que deverá obter:

$$A = 0,\ B = -1,\ C = 0 \text{ e } D = 1$$

Assim: $\frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-4x+4)} = \frac{-1}{x^2-4x+5} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2+1} + \frac{1}{(x-2)^2}$

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-4x+4)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-2)^2+1} + \frac{1}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= -\text{arc tg}(x-2) - \frac{1}{x-2} + k$$

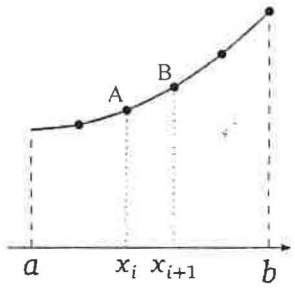
3.6. COMPRIMENTO DE UM ARCO

Suponha que f(x) é uma função contínua no intervalo [a, b]. Já aprendemos como calcular, usando integral, a área da região delimitada pelo gráfico de f, o eixo x e as retas x = a e x = b. Vamos agora aprender como calcular o comprimento da linha do gráfico de uma função contínua.

Sejam $A(x_i, f(x_i))$ e $B(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ dois pontos distintos do gráfico da função. A distância entre os pontos A e B vale:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_{i+1}-f(x_i))^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2},$$

onde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.



A estratégia pra calcular o comprimento do gráfico de f é fazer Δx_i tender a zero e somar os infinitos valores dos segmentos infinitesimais ligando dois pontos do gráfico. Repare que, quando $\Delta x_i \to 0$, o quociente $\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\Delta x_i}$ tende a $f'(x_i)$.

Deste modo, o comprimento L do gráfico de f é igual a

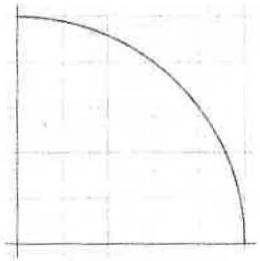
$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\,\Delta x_i, \text{ onde } \Delta x_i \to 0.$$

Note agora semelhança entre a integral de Riemann e o somatório indicado acima. Fazendo n tender a infinito e, consequentemente, o comprimento de cada intervalo tender a zero, $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\,\Delta x_i$ pode ser interpretado como a integral da função $\sqrt{1 + f'(x_i)^2}$ na variável x, com x variado desde a até b:

$$\mathbf{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.}$$

Vamos aplicar essa fórmula pra calcular o perímetro de uma circunferência de raio R. Sabe-se que a circunferência centrada na origem e raio R, no plano cartesiano, tem equação $x^2 + y^2 = R^2$. Sabe-se que uma circunferência não pode representar o gráfico de uma função, pois gera problema de ambiguidade (há retas verticais

encontram o gráfico da circunferência em dois pontos). Assim, é necessário restringir domínio e imagem para que uma parte da circunferência possa representar o gráfico de uma função. Pra simplificar o cálculo da integral, vamos restringir aos pontos do primeiro quadrante do plano cartesiano, onde se localiza um arco de um quarto de circunferência. Nesse caso, a função que representa esse um quarto de circunferência é $f:[0, R]\to[0, R]$ dada por $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$.



Pra calcular o comprimento de toda a circunferência, basta calcular o comprimento desse um quarto de circunferência e depois multiplicar o resultado obtido por quatro.

Derivando f na variável x:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Logo, o comprimento total da circunferência é dado por:

$$L=4\int_0^R\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$$

Fazendo $x = Ru \Rightarrow dx = R\,du$.

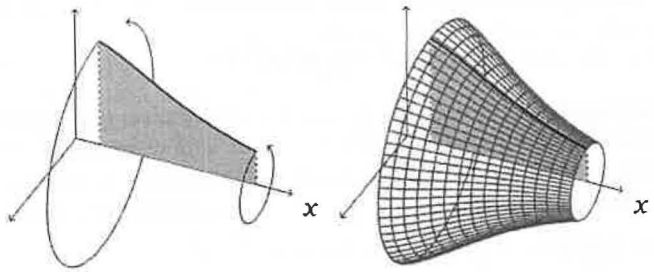
Quanto aos limites de integração, quando $x = 0$ tem-se $u = 0$ e quando $x = R$ tem-se $u = 1$. Portanto, a integral fica da forma:

$$L=4\int_0^1\frac{R}{\sqrt{R^2-R^2x^2}}R\,du=4R\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,du=4R\left(\text{arc sen}\,u\right)\Big|_0^1=$$

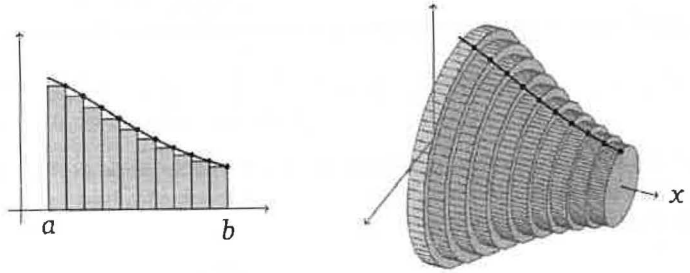
$$=4R(\text{arc sen}\,1-\text{arc sen}\,0)=4R\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2\pi R$$

3.7. VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Um sólido é denominado sólido de revolução quando é obtido pela rotação de uma curva contínua sobre um eixo, como ilustrado na figura abaixo



Vamos agora desenvolver uma técnica pra calcular o volume de um sólido de revolução. Considere que o sólido de revolução foi gerado pela rotação do gráfico de uma função contínua $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ em torno do eixo x. Inicialmente, vamos dividir o intervalo [a, b] em n retângulos menores, usando uma ideia muito parecida com a demonstração da integral de Riemann. Ao rotacionar o gráfico de f em torno do eixo x, esses retângulos rotacionados formam fatias cilíndricas, como indicado na figura abaixo.



O segmento de reta AB foi dividido em n partes iguais:

$AB = [x_0, x_1[\cup[x_1, x_2[\cup[x_2, x_3[\cup...\cup[x_{n-1}, x_n]$, onde $a = x_0$ e $b = x_n$.

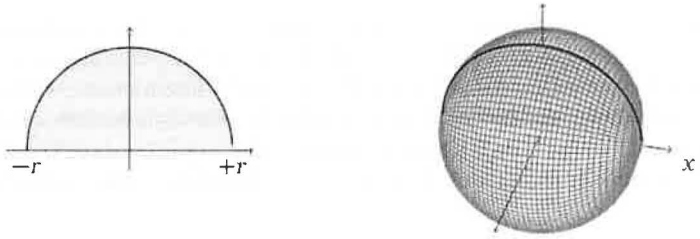
Portanto, o retângulo de ordem i tem base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ e a altura $f(x_i)$. É notório que o volume de um cilindro de revolução de raio de base r e altura h é dado por $V = \pi r^2 h$. Como a fatia cilíndrica i tem raio $f(x_i)$ e altura $f(x_i)$, seu volume é dado por $V_i = \pi[f(x_i)]^2\Delta x_i$. Como o volume do sólido pode ser aproximado pela soma dos volumes das fatias cilíndricas:

$$V=\sum_{i=1}^{n}V_i=\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_i)]^2\,\Delta x_i$$

Quando o número de retângulos tende pra infinito tem-se que $\Delta x_i \to 0$ e, portanto, o somatório $\sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i$, sendo f contínua, converge pra integral de Riemann. Consequentemente, o volume do sólido de revolução é dado por:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$$

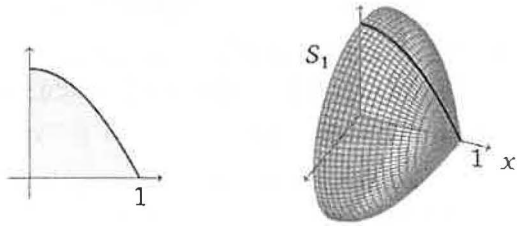
Vamos agora apresentar uma aplicação bem simples, que é a demonstração do volume de uma esfera de raio r. É possível obter uma esfera rotacionando 360°, em torno do eixo x, uma semicircunferência de raio r centrada na origem. A equação da semicircunferência é dada por $x^2 + y^2 = r^2$, com a restrição $y \geq 0$. Desta forma, a função associada é $f:[-r, r]$ dada por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.



De acordo com a teoria apresentada, o volume da esfera de raio r é dado por:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Também é possível calcular o volume de um parabolóide (sólido gerado pela rotação de uma parábola em torno de um eixo) de revolução, bastando considerar a função $f[0, 1] \to IR$ dada por $f(x) = 1 - x^2$.



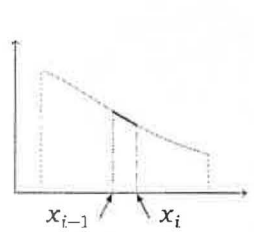
$$V = \int_0^1 \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 (1 - x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 \, dx = \pi \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 =$$

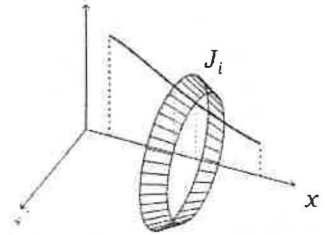
$$= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8\pi}{15}$$

3.8. ÁREA DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

No item anterior apresentamos uma técnica pra calcular o volume de um sólido de revolução. Agora vamos apresentar um método pra calcular a superfície lateral de um sólido de revolução. A estratégia de demonstração é bem parecida. Suponha que uma função contínua $f: [a, b] \to IR$ é rotacionada 360° em torno do eixo x, gerando a superfície de revolução. Divida o intervalo [a, b] é dividido em n intervalores menores, todos de mesmo comprimento:

$AB = [x_0, x_1[\cup [x_1, x_2[\cup [x_2, x_3[\cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$, onde $a = x_0$ e $b = x_n$.





Tome um desses intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e rotacione 360° a porção do gráfico de f pertence a esse intervalo, em torno do eixo x. Considerando que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tende a zero, pode-se supor que é gerada uma superfície lateral de um tronco de cone. Sabe-se que a área da superfície lateral de um tronco de cone vale $S = \pi g(R + r)$, onde g é a geratriz do tronco, r é o raio de uma das bases e R é o raio da outra base. Na nossa realidade, $g = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$, $r = f(x_i)$ e $R = f(x_{i-1})$. Assim, a área gerada pela rotação da porção do gráfico de f pertencente ao intervalo Δx_i vale:

$$S_i = \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \, (f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

Fazendo n tender pra infinito, tem-se que Δx_i tende pra zero e $f(x_{i-1})$ tende pra $f(x_i)$, fazendo com a área S_i fique da forma:

$$S_i = \pi \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \, .2f(x_i) = 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} \right)^2} \, .\Delta x_i$$

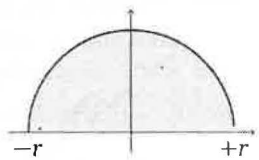
Sabe-se que quando Δx_i tende a zero a expressão $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$ é a derivada de f no ponto x_i. Logo, a área total da superfície gerada pela rotação de f em torno do eixo x é igual à soma de todas as áreas S_i, obtendo:

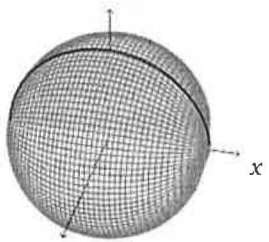
$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \, .\Delta x_i$$

Utilizando a similaridade com a integral de Riemann, conclui-se que a área da superfície gerada pela rotação do gráfico de f em torno de x vale:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

Uma excelente aplicação é demonstrar que a área da superfície esférica, de raio r, vale $S = 4\pi r^2$. A superfície esférica é gerada quando se rotaciona, sobre o eixo x, uma semicircunferência de raio r.





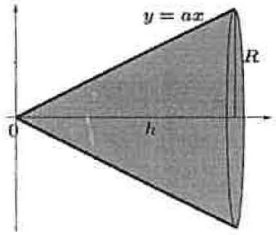
A função cujo gráfico é uma semicircunferência de raio r, centrada na origem do plano cartesiano, é f:[– r, r] dada por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Derivando na variável x, obtém-se $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

Substituindo na integral que fornece o valor da área:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\ dx = 2\pi\int_{-r}^{r} r\ dr \Rightarrow$$

$$S = 2\pi(rx)\Big|_{-r}^{r} = 2\pi(r^2-(-r^2)) = 4\pi r^2$$

Também é possível determinar a fórmula da superfície lateral de um cone reto de raio R e altura h. Basta rotacionar, sobre o eixo x, uma semirreta com extremidade na origem. A função que representa essa semirreta é f:[0, R]→[0, h] dada por $f(x) = \frac{R}{h}x$. Assim, a área lateral de um cone vale:



$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx = 2\pi\int_0^h \frac{Rx}{h}\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}\ dx =$$

$$= \frac{2\pi Rg}{h^2}\int_0^h x\ dx = \frac{2\pi Rg}{h^2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^h\right) = \frac{2\pi Rg}{h^2}\frac{h^2}{2} = \pi Rg$$

onde g é a geratriz do cone

Exercícios Resolvidos

01) Calcule o comprimento da curva da função $f(x) = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ no intervalo [1, 2].

Solução:

$$L = \int_1^2\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx = \int_1^2\sqrt{1+\left[\left(\ln x - \frac{1}{8}x^2\right)'\right]^2}\ dx = \int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)^2}\ dx =$$

$$= \int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}\ dx = \int_1^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}\ dx = \int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2}\ dx =$$

$$= \int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)dx = \left(\ln x + \frac{x^2}{8}\Big|_1^2\right) = \frac{3}{8}+\ln 2$$

02) Calcular o volume do sólido obtido pela rotação da curva $y = x^2$ em torno do eixo Ox para $-1 \le x \le 1$.

Solução:

$$V = \int_{-1}^{1}\pi f(x)^2\ dx = \pi\int_{-1}^{1}x^4\ dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\right) = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$$

03) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x.

Solução:

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2\ dx = \pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\Big|_{-a}^{a}\right) = \pi b^2\left(2a-\frac{2a}{3}\right) = \frac{4\pi ab^2}{3}$$

04) Determine a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = 2\sqrt{x}$ em torno do eixo Ox, quando x varia no intervalo [1, 3].

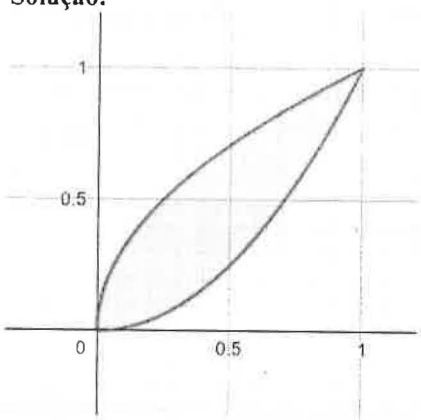
Solução:

$$S = \int_1^3 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx = \int_1^3 2\pi 2\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\ dx = 4\pi\int_1^3 \cancel{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x+1}}{\cancel{\sqrt{x}}}\ dx =$$

$$= 4\pi\int_1^3\sqrt{x+1}\ dx = 4\pi\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_1^3 = \frac{8\pi}{3}(8-2\sqrt{2})$$

05) (IME/CG-04) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da área delimitada no plano OXY pelas equações $y = x^{1/2}$, $y = x^2$, $x = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo OX.

Solução:



A região que será rotacionada em torno do eixo x está representada na figura ao lado. Como o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ está sempre acima, no intervalo (0, 1), do gráfico de $g(x) = x^2$, o volume gerado é calculado fazendo:

$$V = \int_0^1 \pi[f^2(x) - g^2(x)]\,dx \Rightarrow$$

$$V = \pi\int_0^1 x - x^4\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \Rightarrow V = \frac{3\pi}{10}$$

06) Determine o comprimento da curva dada pelo gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$ no intervalo $0 \le x \le \pi/6$.

Solução:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{tg} x \Rightarrow (f'(x))^2 = \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow$$

$$1 + (f'(x))^2 = \sec^2 x \Rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sec x$$

Assim: $L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/6} \sec x\,dx$

O cálculo da integral de sec x não é óbvio!

$$L = \int_0^{\pi/6} \sec x \frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\sec^2 x + \sec x.\operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx$$

Se $u = \sec x + \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \sec x.\operatorname{tg} x + \sec^2 x\,dx$

Quando $x = 0$ tem-se $u = 1$ e quando $x = \pi/6$ tem-se $u = \sqrt{3}$

Substituindo na integral:

$$L = \int_0^{\pi/6} \frac{\sec^2 x + \sec x.\operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u}\,du = \left(\ln|u|\Big|_1^{\sqrt{3}}\right) = \ln\sqrt{3}$$

3.9. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Uma integral é classificada como imprópria quando pelo menos um dos limites de integração tende pra $-\infty$ ou $+\infty$. Assim, são classificadas como integrais impróprias: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, onde a e b são reais. Os casos $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são denotados como integrais impróprias em intervalos semi-infinitos e o caso $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é denominado de integral imprópria em intervalo finito.

Repare que não é possível aplicar diretamente as somas de Riemann pra calcular essa integral, pois em qualquer divisão que se faça no intervalo definido pelos limites de integração teremos um número infinito de retângulos.

A estratégia pra calcular uma integral imprópria é substituir o limite de integração que tende pra infinito (ou os dois limites, se for o caso) por um número L, calcular a integral e depois fazer L tender pra infinito na fórmula encontrada pra primitiva. Pra formalizarmos esse procedimento, observe a seguinte definição.

Definição: Seja $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se o limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_a^L f(x)\,dx,$$

existe e é finito, então afirmamos que a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Caso contrário, afirmamos que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Observação: Integrais impróprias do tipo $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ se definem da mesma maneira: $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{L\to-\infty}\int_L^b f(x)\,dx$

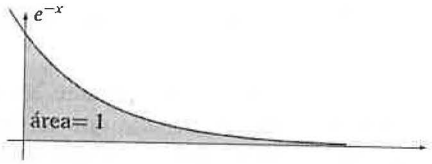
Definição: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que as integrais $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existem e assumem valores finitos, então afirmamos que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e seu valor é definido como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Vamos agora apresentar aplicações de integrais impróprias. Iniciaremos calculando o valor, caso seja finito, de $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_0^L e^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty} -e^{-x}\Big|_0^L = \lim_{L\to+\infty} 1 - e^{-L} = 1$$

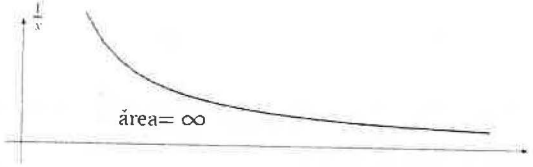
Este resultado confirma que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge e vale 1. Como $f(x) = e^{-x}$ é contínua e seu gráfico está sempre acima do eixo x, qualquer integral de f pode ser interpretada como uma área, mesmo que o intervalo seja infinito. Logo, o resultado $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$ significa que a área delimitada pelo gráfico de f e o eixo x, no primeiro quadrante, é finita e vale 1, como ilustra a figura abaixo.



Agora vamos calcular o valor de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{L\to+\infty} \int_1^{L} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{L\to+\infty} \ln x \Big|_1^{L} = \lim_{L\to+\infty} \ln L = +\infty$$

Esse resultado significa que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, ou seja, a área delimitada pelo gráfico de f, eixo x e a reta vertical x = 1 tende pra infinito, como sugere a imagem abaixo.



Os dois exemplos apresentados de integrais impróprias são bem interessantes, pois tanto e^{-x} quanto $\frac{1}{x}$ tendem a zero quando x tende a mais infinito. Contudo, esse fato, apesar de necessário, não é suficiente para que suas integrais sejam ambas convergentes. Mas por que isso aconteceu? Observe os gráficos das duas funções, ilustrados acima. Note que o gráfico de e^{-x} converge muito rapidamente pro eixo (que é equivalente a tender a zero), enquanto que o gráfico de $\frac{1}{x}$ demora bem mais pra se aproximar do eixo x. Isso é suficiente pra entender porque a integral de e^{-x} converge e o gráfico de $\frac{1}{x}$ diverge.

3.9.1. Integrais Impróprias em Assíntotas Verticais

Um outro tipo de integral que é classificada como imprópria ocorre quando a função f é definida num intervalo do tipo]a, b] e há uma assíntota vertical em x = a. Nesse caso, não é possível incluir x = a como limite de integração, uma vez que x = a não pertence do domínio da função, porém é possível utilizar notação de limite pra descrever a integral. Para tanto, basta escrever a^+ como limite inferior de integração.

Por exemplo, suponhamos que se deseja calcular, supondo convergente, a integral $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo]0, 4]. Claramente, há uma assíntota vertical em x = 0, como indica o gráfico 1 abaixo. Existe uma teoria pra calcular a integral imprópria com assíntotas verticais, porém sua aplicação foge dos objetivos desse livro. Pra contornar esse problema, vamos adaptar a técnica desenvolvida pra integrais impróprias com assíntotas horizontais. Sabe-se que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta y = x. Desta forma, a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo y é igual à área delimitada pelo gráfico f^{-1} e o eixo x, sendo apenas necessário adicionar à área de f^{-1} a área o retângulo destacado no gráfico 2.

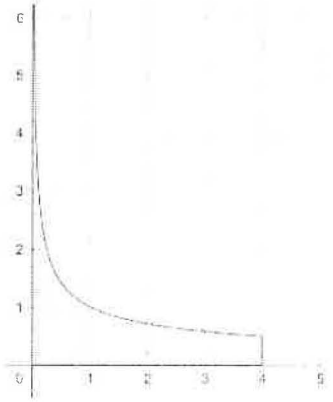


Gráfico 1: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

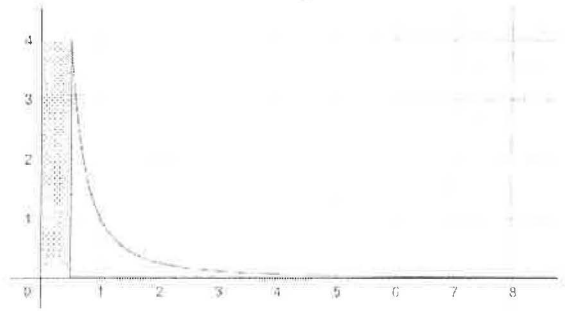


Gráfico 2: $y = \frac{1}{x^2}$

Se f:]0, 4], com $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, então f^{-1}: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ com $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$. Logo, a integral solicitada por ser determinada da seguinte maneira:

$$\int_{0^+}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}.4 + \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 2 + \lim_{L\to+\infty} \int_{1/2}^{L} \frac{1}{x^2}\,dx = 2 + \lim_{L\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_{1/2}^{L} =$$

$$= 2 + \lim_{L\to+\infty} 2 - \frac{1}{L} = 2 + 2 = 4$$

Sendo o valor finito, significa que a integral converge.

Exercícios Resolvidos

01) Calcule o valor de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$.

Solução:

Se $x = u^2$ então $dx = 2u\,du$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_1^{L} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{2}{u^2+1}\,du =$$

$$= \lim_{L\to+\infty} 2\operatorname{arctg} u\Big|_1^{\sqrt{L}} = \lim_{L\to+\infty} 2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{L} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

02) Calcule o valor de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^7}\,dx$.

Solução:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^7}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_1^{L} \frac{1}{x^7}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\left(-\frac{1}{6x^6}\Big|_1^{L}\right) = \lim_{L\to+\infty}\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{L^6}\right) = \frac{1}{6}$$

03) Calcule o valor de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

Solução:

Suponha que $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

Note que $x \to 0$ então $u \to 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_0^{L} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_1^{L} \frac{1}{2u}\,du = \lim_{L\to+\infty}\frac{\ln u}{2}\Big|_1^{L} =$$

$$= \lim_{L\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{2}\Big|_0^{L} = \lim_{L\to+\infty}\ln\sqrt{L^2+1} = +\infty$$

Nesse caso, a área compreendida pelo gráfico da função e o eixo x diverge.

Exercícios Propostos

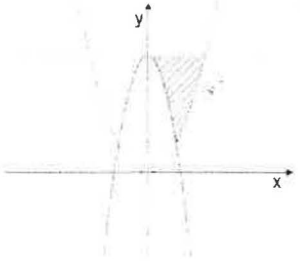
01) O valor de $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^4}\,dx$ é

a) 4 ln 2 b) 1/8 c) 31/160 d) 7/24 e) 7/8

02) A área da região situada entre os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, para $x \in [0, 2]$, é de

a) 4/3 b) 3/2 c) 31/12 d) 4 e) 8

03) A figura abaixo mostra os gráficos das funções $y = x^2$, $y = 4 - 3x^2$ e $y = 4$.



A área da região hachurada é

a) 1 b) 2 c) 8/3 d) 16/3 e) 6

04) Sendo F uma primitiva de $f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^2}$, então F(1) – F(0) vale

a) 1/20 b) 1/25 c) 1/40 d) 3/125 e) 3/250

05) O valor de $\int_0^2 6x^3\sqrt{x^4+9}\,dx$ é

a) 386 b) 147 c) 125 d) 98 e) 49

06) O valor de $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ é

a) $-1/e^2$ b) $(2-e)/e$ c) $1/e$ d) 3/2 e) 2

07) A área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 2x^3$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$ é

a) 1/4 b) 3/4 c) 1 d) 5/4 e) 2

08) A área da região compreendida entre os gráficos das funções $y = x^3$ e $y = 4x$, para $0 \le x \le 4$, vale

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

09) O valor de $\lim_{T\to+\infty} \int_0^T 2xe^{-x^2}dx$ é

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

10) O valor de $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ é

a) $\pi/12$ b) $\pi/10$ c) $\pi/8$ d) $\pi/4$ e) $\pi/2$

11) O valor de $\int_0^{\pi/2} 2x\cos x\,dx$ é

a) $\pi - 3$ b) $\pi - 2$ c) $\pi - 1$ d) $\pi + 1$ e) $\pi + 2$

12) A área da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0, 3]$, é

a) 8/3 b) 7/3 c) 5/3 d) 4/3 e) 2/3

13) O valor de $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x 3\cos t^2\,dt}{\int_0^x e^{-t^2}dt}$ é

a) 0 b) 1 c) 3 d) 6 e) $+\infty$

14) O valor de $\int_3^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ é

a) $9\pi/2$ b) $7\pi/2$ c) $5\pi/2$ d) π e) 0

15) Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 1$ no ponto $(1, 2)$. Então, a área da região contida no semiplano $y > 0$, e delimitada pelo gráfico de f, pela reta r e pelo eixo Ox, é

a) 2/3 b) 1 c) 4/3 d) 2 e) 4

16) O valor de $\int_0^2 x.\cos(2-x)dx$ é

a) 0 b) $1+\cos 2$ c) $1-\cos 2$ d) $1+\text{sen } 2$ e) $1-\text{sen } 2$

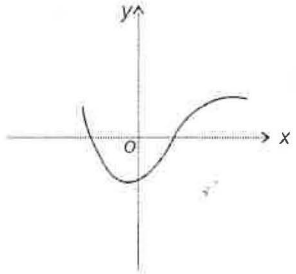
17) O valor de $\int_0^1 \frac{4x^2-4x}{(x+1)(x^2+1)}dx$ é

a) $\ln 2 - 4$ b) 4 c) $4-\pi$ d) $4+\ln 2-\pi$ e) $4\ln 2-\pi$

18) Se $f(x) = e^x \int_0^x e^{t^2}dt$, então $f'(x) - f(x)$ é igual a

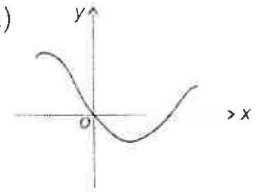
a) e^{x+x^2} b) e^{x^2} c) e^x d) $2xe^{x^2}$ e) $2xe^{x+x^2}$

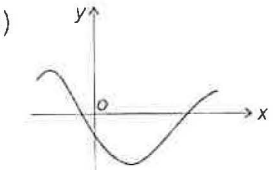
19) A figura abaixo representa o gráfico da função f.

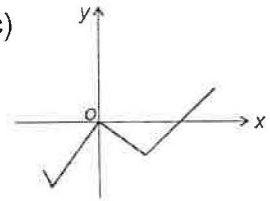


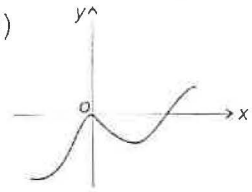
Considere a função $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

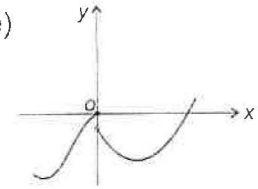
A figura que melhor representa o gráfico da função g é

a)


b)


c)


d)


e)


20) O valor de $\int_0^{\pi/2} 3(1-\operatorname{sen} x)(x+\cos x)^2 dx$ é

a) $\frac{\pi^3}{8}-2$ b) $\frac{\pi^3}{8}-1$ c) $\frac{\pi^3}{8}$ d) $\frac{\pi^3}{8}+1$ e) $\frac{\pi^3}{8}+2$

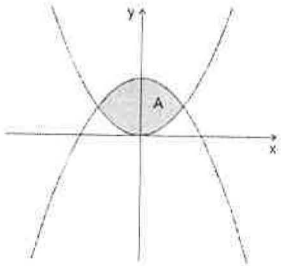
21) O valor de $\int_1^2 2x^3 e^{x^2} dx$ é

a) $3e^2$ b) $3e^3$ c) $3e^4$ d) $4e^2$ e) $4e^4$

22) O valor de $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ é

a) $\pi/6$ b) $\pi/4$ c) $\pi/3$ d) $\pi/2$ e) π

23) Seja A a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = kx^2$ e $g(x) = 1 - kx^2$, em que $k > 0$.



O valor de k para que A seja igual a 1 é

a) 4/3 b) 9/8 c) 1 d) 8/9 e) 3/4

24) A área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = x.\cos x$ e $g(x) = \cos x$, para $0 \le x \le \pi/2$, é

a) $\pi/2 + \cos 1$ b) $\operatorname{sen} 1 + \cos 1$ c) $2\cos 1$
d) $\pi/2 - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ e) $\pi/2 - 2\cos 1$

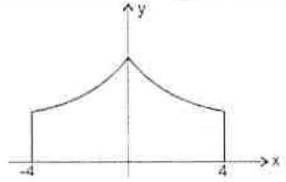
25) O valor de $\int_0^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x\, dx$ é

a) $(e^{\pi/2}-1)/2$ b) $e^{\pi/2}-1$ c) $(1+e^{\pi/2})/2$
d) $1+e^{\pi/2}$ e) $2+e^{\pi/2}$

26) O valor de $\int_0^1 x^2 e^x dx$ é

a) $2e-1$ b) $2e$ c) $e-2$ d) e e) $2e-2$

27) Uma tenda tem base circular de raio 4 m e paredes verticais. As seções transversais da tenda por planos que contêm o mastro central são simétricas com respeito ao mastro e estão representadas na figura abaixo.



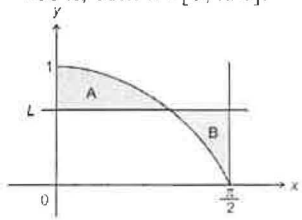
A curva acima, no primeiro quadrante, que liga o mastro à parede, tem equação $\sqrt{x} = 4 - y$. O volume interior à tenda, em m^3, é igual a

a) $189\pi/5$ b) $192\pi/5$ c) $196\pi/5$
d) $201\pi/5$ e) $207\pi/5$

28) Um sólido, que tem aspecto de uma forma de pudim, é obtido por rotação em torno do eixo Ox da região compreendida entre as retas $x = 0$, $x = 1$, $y = x + 3$ e $y = -x + 2$. Qual é o volume do sólido?

a) 8π b) 10π c) 12π d) 14π e) 16π

29) Na figura abaixo, estão representadas a reta vertical $x = \frac{\pi}{2}$, a reta horizontal $y = L$ e o gráfico da função $f(x) = \cos x$, com $x \in [0, \pi/2]$.



O valor de L para que as áreas das regiões A e B, indicadas na figura, sejam iguais é

a) $1/2\pi$ b) $1/\pi$ c) $3/2\pi$ d) $2/\pi$ e) $5/2\pi$

30) (EFOMM-94) Encontra-se para $\int \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2}) dx$ a expressão:

(A) $\sqrt{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} + C$ (B) $-\cos(\frac{x}{2}) + C$ (C) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

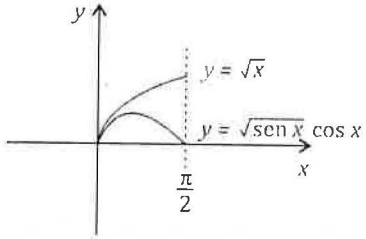
(D) $-\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) + C$ (E) $(1-\cos x) \cdot 0{,}5 + C$

31) O bojo de uma taça é obtido por meio da rotação da curva $y = x^2$ ao redor do eixo Oy. Coloca-se água na taça até que o nível do líquido atinja altura 4. Então, o volume de água na taça é

a) 8π b) 6π c) 5π d) 4π d) 3π

32) Seja A a região do plano definida por

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi/2,\ \sqrt{\operatorname{sen} x}.\cos x \le y \le \sqrt{x}\}$



O volume do sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo x é

a) $\pi^3/8 - \pi/3$ b) $\pi^3/6 + \pi/2$ c) $\pi^3/3 - 1/2$
d) $\pi^3/4 + 1/2$ e) $\pi^3/12 + \pi/4$

33) (EFOMM-94) A primitiva da função $f(x) = (x-1)^4$, que se anula para $x = 2$, tem a seguinte expressão:

(A) $\dfrac{(x-1)^5}{5}$ (B) $\dfrac{(x-1)^4}{4}$ (C) $4\cdot(x-1)^5$

(D) $\dfrac{(x-1)^5 - 1}{5}$ (E) $4\cdot(x-1)^3$

34) (EN-98) O valor de $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \tan^2(2x)\,dx$ é:

a) 1/3 b) 1/6 c) $\sqrt{2} - 1$ d) $\dfrac{8\sqrt{2} - 3\pi}{24}$ e) $\dfrac{4 - \pi}{8}$

35) (EFOMM-13) O valor da integral $\int \operatorname{sen} x.\cos x\,dx$ é:

a) $-\cos x + c$ b) $-(\cos 2x)/4 + c$ c) $-(\cos x)/2 + c$
d) $(\cos x)/4 + c$ e) $(\cos 2x)/2 + c$

36) (EFOMM-15) O valor da integral $\int x e^{x^2}\,dx$ é

a) $\dfrac{1}{4}.e^{x^2} + c$ b) $\dfrac{x}{2}.e^{x^2} + c$ c) $\dfrac{1}{2}.e^{x^2} + c$ d) $\dfrac{1}{4}.e^{x} + c$ e) $\dfrac{1}{4}.e^{x} + c$

37) (EFOMM-13) O gráfico da função contínua $y = f(x)$, no plano xy, é uma curva situada acima do eixo x para $x > 0$ e possui a seguinte propriedade:
"A área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $a \le x \le b (a > 0)$ é igual à área entre a curva e o eixo x no intervalo $ka \le x \le kb$ $(k > 0)$". Se a área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x para x no intervalo $1 \le x \le 3$ é o número A então a área entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $9 \le x \le 243$ vale:

a) 2A b) 3A c) 4A d) 5A e) 6A

38) (EFOMM-14) Uma pesquisa indica a taxa de crescimento populacional de uma cidade através da função $P(x) = 117 + 200x$, por pessoas anualmente há x anos. Passados 10 anos, o crescimento é dado pela integral $\int_0^{10} (117 + 200x)\,dx$. Pode-se afirmar que esse crescimento será de

a) 10130 pessoas. b) 11170 pessoas. c) 11200 pessoas.
d) 11310 pessoas. e) 12171 pessoas.

39) (EN-10) Qual o valor de $\int \operatorname{sen} 6x.\cos x\,dx$?

a) $-\dfrac{7\cos 7x}{2} - \dfrac{5\cos 5x}{2} + c$ b) $\dfrac{7\operatorname{sen} 7x}{2} + \dfrac{5\operatorname{sen} 5x}{2} + c$ c) $\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{2} + c$

d) $-\dfrac{\cos 7x}{14} - \dfrac{\cos 5x}{10} + c$ e) $\dfrac{7\cos 7x}{2} + \dfrac{5\cos 5x}{2} + c$

40) (EFOMM-15) Dada uma função $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabe-se que:
i) $F'(x) = \operatorname{sen} 3x.\cos 5x$, onde $F'(x)$ é a derivada da função F, em relação à variável independente x;
ii) $F(0) = 0$.

O valor de $F\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$ é

a) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \dfrac{3}{4}\right)$ b) $\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \dfrac{3}{4}\right)$ c) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \dfrac{3}{4}\right)$

d) $\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \dfrac{3}{4}\right)$ e) $\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \dfrac{3}{4}\right)$

41) (EN-17) Calcule $\displaystyle\int \frac{3e^{3x}}{e^{6x} + 2e^{3x} + 1}\,dx$ e assinale a opção correta.

a) $-(e^{3x} + 1)^{-1} + c$ b) $(e^{3x} + 1)^{-1} + c$ c) $-(e^{3x} - 1)^{-1} + c$
d) $(e^{3x} - 1)^{-1} + c$ e) $-3(e^{3x} + 1)^{-1} + c$

42) (EFOMM-17) Seja $g(x) = 4 - \cos x$ e $f'(x) = 4x - e^{2x}$. Sabendo-se que $f(0) = g(0)$, determine $f(x)$.

a) $f(x) = 3 - 2x$

b) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{7}{2}$

c) $f(x) = e^{-2x} - 6x - \frac{2}{3}$

d) $f(x) = e^{2x} - x^2 + 2$

e) $f(x) = e^{2x} + \text{sen } x - 3$

43) (EN-87) A área da região do 1° quadrante limitada pelas retas $y = x/9$ e $y = x/4$ e pela hipérbole $y = 1/x$ vale:

a) 1/3 b) ℓn1,5 c) 1+ ℓn 2 d) 2+ ℓn 3 e) 4

44) (IME-97) Considere a função $y = f(x) = \text{Ln}\,(x + \sqrt{x^2+1})$ onde Ln denota o logaritmo neperiano. Responder aos itens a seguir, justificando sua resposta.

a) Se $g(x) = \text{Ln}\,(2x)$, que relação existe entre os gráficos das curvas f e g ?

b) Pode-se afirmar que a função definida por $H(x) = \frac{f(x)}{2}$ é uma primitiva para a função $T(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$?

45) (EFOMM-17) Calcule a integral indefinida $\int \text{tg}\,x.(1+(\text{sen}\,x.\sec x)^2)\,dx$

a) $\frac{\sec^2 x}{2} + c$

b) $\text{tg}\,x.\sec x + 2x + c$

c) $\cos x + 2\text{sen}\,x - \sec x + c$

d) $\frac{2\cos x - \text{sen}\,2x}{3} + c$

e) $\frac{\cos^2 x}{2} + c$

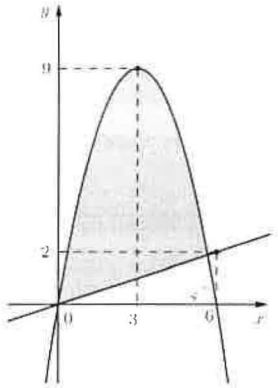
46) (EN-13) O valor de $\int_0^{\pi/2}(e^{2x} - \cos x)\,dx$ é

a) $\frac{e^{\pi}}{2} - \frac{3}{2}$ b) $\frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2}$ c) $\frac{e^{\pi}}{2} + \frac{3}{2}$ d) $\frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{3}{2}$ e) $\frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{1}{2}$

47) (EFOMM-19) Considere a função $f(x) = \cos x - \text{sen}\,x$. Determine o valor da integral de $f(x)$ no intervalo $[0, \pi]$, ou seja, $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

a) π b) -2 c) -1 d) zero e) 2

48) (EFOMM-18) A área de uma figura plana é dada pelo cálculo da integral $A = \int_a^b [g(x) - h(x)]\,dx$, onde $g(x)$ é a função que limita a figura superiormente, $h(x)$ limita a figura inferiormente e os valores a, b $\in \mathbb{R}$ representam o início e o fim da figura em relação ao eixo x do plano cartesiano. Com isso, determine a área hachurada abaixo, definida superiormente por uma parábola e inferiormente por uma reta.



a) 42,7 b) 4913/162 c) 27 d) 21 e) $46\pi/7$

49) (EN-15) Sabendo-se que f é uma função real de variável real, tal que a derivada segunda de f em x é $f''(x) = \cos^2 x + 1$ e que $f(0) = 7/8$ e $f'(0) = 2$, o valor de $f(\pi)$ é

a) $2\pi + 11/8$ b) $\pi^2 + \pi + 5/8$ c) $2\pi^2 + 5$

d) $3\pi^2/4 + 2\pi + 7/8$ e) $3\pi^2 + \pi + 5/8$

50) (EFOMM-19) Assinale a solução correta do seguinte problema de integração:

$$\int 2\sqrt{2-3x}\,dx.$$

a) $-\frac{4}{9}(2-3x)^{3/2} + C$

b) $-\frac{4}{9}(2-3x)^{2/3} + C$

c) $\frac{4}{3}(2-3x)^{3/2} + C$

d) $-\frac{4}{9}(2+3x)^{2/3} + C$

e) $4(2-3x)^{3/2} + C$

51) (EFOMM-21) O valor da integral indefinida $\int (5x+3)^{20}\,dx$ é dado por

a) $\frac{(5x+3)^{20}}{21} + C$

b) $\frac{(5x+3)^{19}}{19} + C$

c) $\frac{(5x+3)^{19}}{105} + C$

d) $\frac{(5x+3)^{21}}{21} + C$

e) $\frac{(5x+3)^{21}}{105} + C$

52) (EN-17) A integral $\int \frac{x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1}{(x^4 - 1)(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)} dx$ é igual a:

a) arc tg x + c b) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$ c) ln |x – 1| + c

d) ln |x + 1| + c e) arc sen x + c

53) (EFOMM-23) Seja I o valor da integral abaixo

$$I = \int_0^1 (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4 \, dx$$

O valor de 30.I é

a) 256 b) 528 c) 1024 d) 2048 e) 4096

54) (EFOMM-24) Sendo f(x) = sen 2x, calcule a área limitada por f(x) e pelas retas x = 0, x = π/8 e y = 0.

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{3-\sqrt{2}}{4}$

55) (EN-89) $\int_0^1 \frac{x}{2 - 2x^2 + x^4} dx$ é igual a

a) - π/8 b) -π/4 c) π/8 d) π/4 e) 0

56) (EN-97) O valor de $\int_{-1}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right) dx$ é:

a) π/3 b) 1 c) 1/3 d) – 1/3 e) - 1

57) (EN-99) Sabendo-se que a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x^2 + 15} - 8} & \text{se } x \neq 7 \\ a & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

é contínua em x = 7 e que $b = \int_0^{\pi/2} \cos 2x . \operatorname{sen} 4x \, dx$, o valor de $\frac{a}{b}$ é:

a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ b) $2\sqrt{7}$ c) $\frac{6\sqrt{7}}{49}$ d) $\frac{4\sqrt{7}}{49}$ e) $7\sqrt{7}$

58) (EN-01) A integral $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos 2x}{\cos^2 x} dx$ vale

(A) 2x + sec x – tg x + c (B) ℓn | sec x + tg x + sec x |+ c

(C) sec x + x + cotg x + c (D) 2x + cossec x – cotg x + c

59) (EN-04) Seja p uma constante real positiva. A integral $\int e^{\frac{\ln(2px)}{2}} dx$ é igual a

a) $\frac{2}{3}(2px)^{3/2} + c$ b) $p(2px)^{-1/2} + c$ c) $\frac{1}{3}(2px)^{3/2} + c$

d) $\frac{2}{3}x(2px)^{1/2} + c$ e) $\frac{1}{3}x(2px)^{-1/2} + c$

60) (EN-05) Sabendo-se que y (x) é uma função real derivável em todo o seu domínio e que $y'(x) = e^{3x} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{1 - 3x}$ e $y(0) = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}$, pode-se afirmar que y (–1) é igual a

a) $\frac{e^{-3} - 2\ln 2}{3}$ b) $\frac{4e^{-3} + 5}{4}$ c) $\frac{e^{-3} + 3\ln 2 + 3}{3}$

d) $\frac{3 - 2\ln 2 + e^{-3}}{3}$ e) $\frac{e^{-3} - \ln 2 + 3}{3}$

61) (EN-06) O cálculo de $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx$ é igual a:

a) $\frac{\ln |1 + e^{4x}|}{4} + c$ b) 2 arctg e^{2x} + c

c) $\frac{\text{arc tg } e^{2x}}{4} + c$ d) $\frac{\ln |1 + e^{4x}|}{4e^{2x}} + c$

e) $\frac{-\text{arc cotg } e^{2x}}{2} + c$

62) (EN-19) Sejam h, p, f e g funções reais tais que h(x) = |x| + |x – 1|, p(x) = x^3, f(x) = x^2 e g(x) = ax^3, com a > 0. O valor de a torna a área da região limitada por f e g, no intervalo [0, 1/a] igual a 2/3. A é o valor da área da região limitada por h, p e pelo eixo das ordenadas. Assinale a opção que representa um número inteiro.

a) A/a^2 b) $A^2 - 2a$ c) $A^2 - a^2$ d) A^2/a e) $2A - a^2$

63) (EN-07) Sejam a e b constantes reais positivas, a ≠b. Se x é uma variável real, então $\int \frac{\left(a^x - b^x\right)^2}{a^x b^x}\,dx$ é:

a) $(\ln a - \ln b)\left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x + c$

b) $(\ln b - \ln a)\left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x + c$

c) $\frac{1}{(\ln a - \ln b)}\left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x + c$

d) $\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x} - 2x + c$

e) $\frac{1}{(\ln b - \ln a)}\left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x + c$

64) (EN-08) O valor de $\int 4 \operatorname{sen} 2x \cos^2 x\,dx$ é

a) $-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{4} + C$

b) $-\cos 2x - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} + C$

c) $-\frac{4\cos^3 x}{3} + C$

d) $-\frac{3}{2}\cos 2x + C$

e) $-\cos 2x - \frac{\cos 4x}{4} + C$

65) (EN-08) Considere y = $f(x)$ uma função real, de variável real, derivável até 2ª ordem e tal que $f''(x) + f(x) = 0$, $\forall x \in \Re$. Se $g(x) = f'(x) \operatorname{sen} x - f(x)\cos x + \cos^2 x$, então.

a) $g(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C$

b) $g(x) = C$

c) $g(x) = f(x) - \frac{\cos 2x}{2} + C$

d) $g(x) = 2f(x) - \frac{\cos 2x}{2} + C$

e) $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x + C$

66) (EN-09) O valor de $\int \frac{1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{(1 - x^2)(1 + x^2)}}\,dx$ é

a) arc cos x + arc cotg x + C
b) arc sen x – arc tg x + C
c) – arc sen x – arc cotg x + C
d) arc cos x + arc tg x + C
e) – arc cos x + arc tg x + C

67) (EN-11) Sejam $f(x) = \ln(\cos x)^2$, $0 \le x < \pi/2$ e $F(x) = \int\left[(f'(x))^2 + \operatorname{sen}^2 2x\right]dx$. Se $F(0) = \frac{7\pi}{8} - 5$, então $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} F(x)$ vale

a) – 2 b) – 1 c) 0 d) 1 e) 2

68) (EN-12) Qual o valor de $\int (\operatorname{cossec} x . \sec x)^{-2}\,dx$?

a) $\frac{1}{32}(4x - \operatorname{sen} 4x) + c$

b) $\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

c) $\frac{\operatorname{sen}^3 x . \cos^5 x}{9} + c$

d) $\frac{1}{16}(4x - \operatorname{sen} 4x) + c$

e) $\frac{1}{16}(4x + \operatorname{sen} 4x) + c$

69) (EN-12) A taxa de depreciação $\frac{dV}{dt}$ de determinada máquina é inversamente proporcional ao quadrado de t + 1, onde V é o valor, em reais, da máquina t anos depois de ter sido comprada. Se a máquina foi comprada por R$ 500.000,00 e seu valor decresceu R$ 100.000,00 no primeiro ano, qual o valor estimado da máquina após 4 anos?

a) R$ 350.000,00 b) R$ 340.000,00 c) R$ 260.000,00
d) R$ 250.000,00 e) R$ 140.0000,00

70) (EN-13) Considere a função f(x) = ln (sec x + tg x) + 2.sen x, com $0 < x < \pi/2$. O resultado de $\int[(f'(x))^2 + 2 - 2\cos 2x]\,dx$ é

a) tg x + 8x + 2sen 2x + C
b) sec x + 6x + C
c) sec x – 2x – sen 2x + C
d) tg x + 8x + C
e) sec x + 6x – sen 2x + C

71) (EN-16) Resolvendo $\int \frac{\left[\operatorname{tg}(2x)\cos^4(2x) - \frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{\cot(2x)}\right]}{e^{2\operatorname{tg} x}\cos(4x)\sqrt{\sec^2(2x) - 1}}\sec^2(x)\,dx$ encontra-se

a) $-\frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen}(2x) + c$

b) $-\frac{1}{2}e^{-2\operatorname{tg} x} + c$

c) $-\frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{sen}(2x) + c$

d) $-\frac{1}{2}e^{2x}\cos x + c$

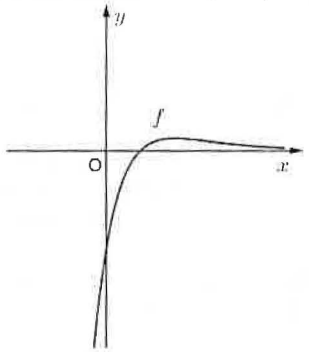
e) $-\frac{1}{2}e^{2x}\sec(4x) + c$

72) (EN-18) Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = \dfrac{1}{1-\cos x+\operatorname{sen} x}$ e $g(x) = \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$. Calcule o valor da integral $\int_a^b f(x)\,dx$, em que a = P/4, b = P/2, e P é o período da função g e marque a opção correta.

a) $\ln\left(\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}\right)$ b) $\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\ln\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

d) $\ln\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$ e) $\ln\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

73) (EN-20) Seja a função f definida por $f(x) = 2e^{-x}.(1 - 2e^{-x})$, cujo gráfico está representado a seguir, e seja o número real ln a, tal que f(ln a) = 0.



Tomemos um valor real positivo h, tal que a área compreendida entre o gráfico da função e o eixo das abscissas no intervalo [ln (a – h);ln (a)] seja igual à área compreendida entre o gráfico da função e o eixo das abscissas no intervalo [ln a; ln (a + h)]. Nesse sentido, pode-se afirmar que:

a) $0 < h < e^{-1}$ b) $e^{-1} < h < \ln 2$ c) $\ln(2) < h < 1$

d) $1 < h < e$ e) h não existe

74) (EN-22) Sabendo que $\int_0^{\pi}(f(x)+\operatorname{sen}(2x))\,dx = 2$, assinale a alternativa que indica do valor de $\int_0^{\pi}\left(f(x)+9.\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2\right)dx$

a) $1 + 3\pi$ b) $2 + 3\pi$ c) $2 + \pi$ d) 5 e) 4

75) (EN-06) Seja y = y(x) uma função real que satisfaz a equação $8y - \left(\dfrac{x^6+2}{x^2}\right) = 0$, $x \in \mathbb{R}_-^*$. O valor de $\int x^2\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ é:

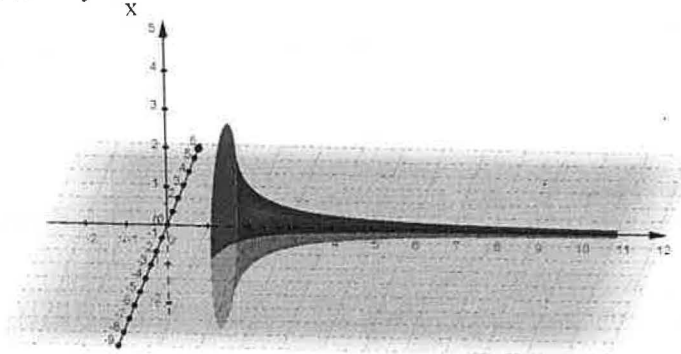
a) $\dfrac{x^6}{12}+\dfrac{\ln|x|}{2}+c$ b) $-\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^{-2}}{4}+c$ c) $-\dfrac{x^6}{12}-\ln|x|+c$

d) $\dfrac{-x^6}{12}-\dfrac{\ln|x|}{2}+c$ e) $\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^{-2}}{4}+c$

76) (EN-22) Seja F uma função real definida por $F(t) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-tx}g(x)\,dx$, em que $g(x) = xe^{-ax}$ com a um número real. Assinale a opção que apresenta todos os valores de t para os quais F(t) exista.

a) $t > -a$ b) $t < a$ c) $t < -2a$ d) $t > a$ e) $t > 2a$

77) (EFOMM-20) A trombeta de Gabriel é um sólido Matemático gerado pela rotação da curva $y = \dfrac{1}{x}$ em torno do eixo x.



O volume desse sólido no intervalo $1 \le x \le 10$ é

a) V = ln 10 b) $V = 9\pi/10$ c) $V = 9\pi/5$

d) $V = \pi.\ln 10$ e) $V = 8\pi$

78) (EN-18) Determine o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pontos (x, y), tais que $0 \le x \le 2$, $y \ge \sqrt{x-1}$ e $0 \le y \le x^2$. A seguir assinale a opção correta.

a) $28\pi/15$ b) $88\pi/15$ c) $108\pi/15$

d) $118\pi/15$ e) $188\pi/15$

79) (EFOMM-24) O comprimento exato da curva $y = \ln(1 - x^2)$ para $0 \le x \le 0{,}5$ é
a) ln 2 b) ln (3) – 1/2 c) ln (3) + 1/2 d) ln (5) – 1/2 e) ln (5) + 1/2

80) (EN-24) Seja F uma função definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \ge 0$, onde $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ t^2 - 1, & t \ge 1 \end{cases}$. Assinale a opção que apresenta o valor de F(3).
a) 9/2 b) 43/6 c) 3 d) – 9 e) 13/3

81) (IME-54) Demonstrar que a área compreendida entre duas parábolas iguais, de vértices comuns e de eixos perpendiculares, é igual a 4/3 da área do quadrado que tem para lado o parâmetro.

82) (IME-65) Determine a equação da curva em que o coeficiente angular em cada ponto (x, y) é igual a: 4 – 2x, e que passa pelo ponto (2, 5).

83) (IME-72) Sejam f: IR→IR e g: IR→IR. Definimos min {f, g} como sendo a função h: IR→IR tal que h(x) = min {f(x), g(x)}, ∀x ∈ IR.
Se $f(x) = x^2 + 3$ e g(x) = 4x, ∀x ∈ R, calcule $\int_0^4 \min\{f, g\}\,dx$.

84) (IME-77) Sejam as regiões definidas pelos conjuntos de pontos A e B onde
$A = \{(x, y) \in IR^2 \mid y^2 < mx, m \in IR^+\}$
$B = \{(x, y) \in IR^2 \mid x^2 < ny, n \in IR^+\}$
Determine a área do conjunto $C = A \cap B$.

85) (IME-79) Determine a área da superfície finita entre as curvas de equação $y = 16 - x^4$ e $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

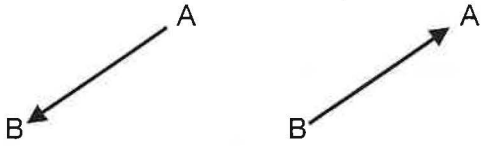
86) (IME-83) Determine o polinômio p(x) do 4° grau, sabendo que $p''(x) = ax^2 + bx + c$ e que p(x) é divisível por p'' (x).

VETORES

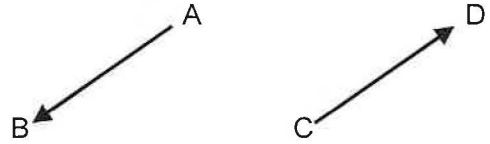
4.1. SEGMENTOS ORIENTADOS

Denomina-se de segmento orientado a um segmento de reta que possui sua origem em um ponto e sua extremidade em outro. Na figura abaixo está ilustrado um exemplo de segmento orientado, com sua origem no ponto A e sua extremidade no ponto B.

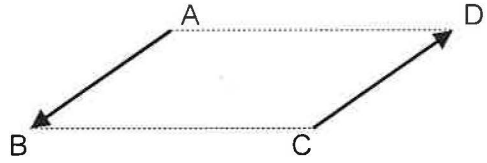
Afirma-se que um seguimento é nulo quando sua origem coincide com sua extremidade (A ≡ B). Dado um segmento AB, segue que o segmento BA é o seu oposto.



Dados dois segmentos orientados AB e CD, como os mostrados na figura seguinte, dizemos que eles têm a mesma direção quando os segmentos AB e CD são paralelos ou coincidentes. Com relação ao seu sentido, dizemos que dois segmentos possuem o mesmo sentido quando, além de terem a mesma direção possuem a mesma orientação. Quando a orientação é oposta, dizemos que os segmentos são opostos.



Dizemos que dois segmentos são equipolentes quando eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

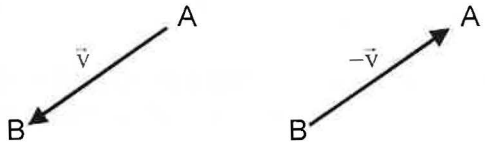


4.2. VETORES

Chama-se de vetor ao segmento de reta orientado que possui sua origem em um ponto e extremidade em outro. Na figura, o segmento AB é chamado de vetor AB e indicado por $\overrightarrow{AB}$.

O módulo de um vetor é igual ao seu comprimento. Para medir seu comprimento é necessário adotar uma escala. A simbologia de módulo de um vetor é $|\overrightarrow{AB}|$.

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é chamado de oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

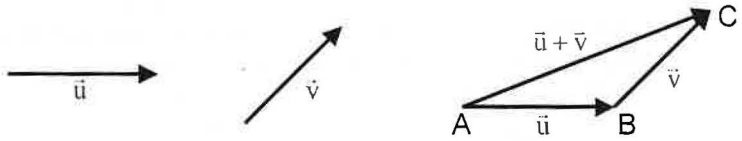


Note que dois vetores aposto possuem o mesmo módulo:

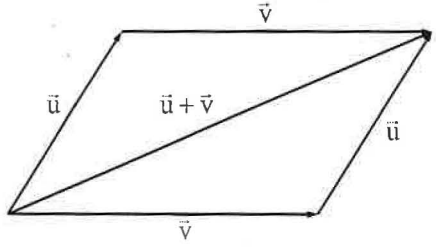
$$|\vec{v}| = |-\vec{v}|$$

4.2. ADIÇÃO DE VETORES (FORMA GEOMÉTRICA)

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores quaisquer. A soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u}+\vec{v}$ que pode ser determinado da seguinte maneira: escolhemos representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O vetor soma é representado pela flecha que possui origem no ponto A e extremidade no ponto C, como mostra a figura:



A soma coincide com a diagonal do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, quando estes vetores são posicionados com o mesmo ponto inicial. Veja:



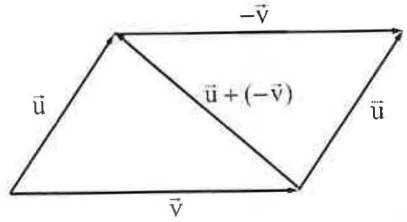
Assim fica evidente que $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.

Vejamos agora algumas definições:

(i) Existe um só vetor nulo 0 tal que, $\vec{v} + 0 = 0 + \vec{v} = \vec{v}$. O vetor nulo tem módulo zero e direção e sentido indeterminados.

(ii) Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um só vetor $-\vec{v}$ (vetor oposto de $\vec{v}$) tal que $\vec{v}+(-\vec{v}) = 0$.

(iii) A diferença dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u}+(-\vec{v})$.



4.3. MULTIPLICAÇÃO DE NÚMERO REAL POR VETOR (FORMA GEOMÉTRICA)

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ (vetor nulo) e um número $k \in IR^*$, define-se produto de um número real k pelo vetor $\vec{v}$, o vetor $k.\vec{v}$ tal que:

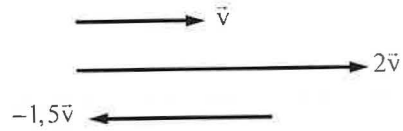
a) módulo: $|k.\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$, ou seja, o comprimento de $k.\vec{v}$ é igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|k|$.

b) direção: $k.\vec{v}$ e $\vec{v}$ possuem a mesma direção.

c) sentido: $k.\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $k > 0$ e $k.\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários se $k < 0$.

Obs. Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ (vetor nulo), então $k.\vec{v} = \vec{0}$.

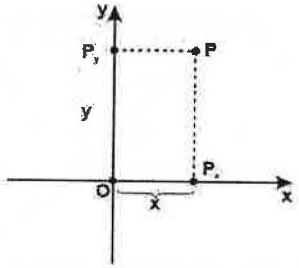
A figura abaixo apresenta o vetor $\vec{v}$ e alguns produtos $k\vec{v}$:



4.4. SISTEMA DE EIXOS CARTESIANOS

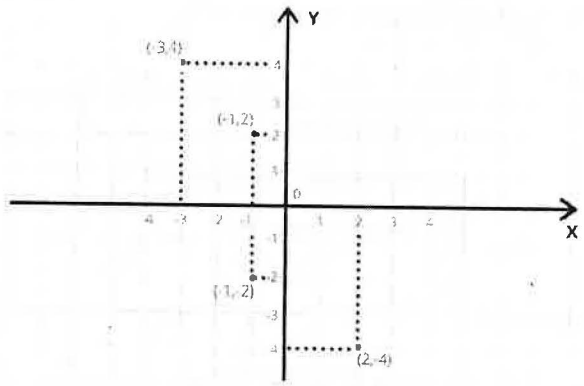
4.4.1. Sistema de Eixos Cartesianos Bidimensional

Considere num plano duas retas orientadas x e y. Em cada reta se define uma escala e um sentido onde os números crescem. Os números reais devem ser colocados, ordenadamente, sobre cada um dos eixos, respeitando a escala definida. O padrão é os números na reta x cresceram pra direita e os números na reta y crescerem pra cima. As retas x e y devem ser perpendiculares, com a interseção O, chamada de origem do sistema, coincidindo com a coordenada 0 de cada reta.



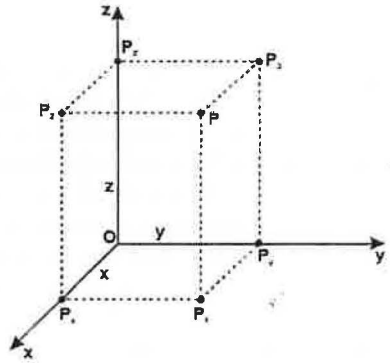
Para determinar as coordenadas de um ponto P nesse plano, projeta-se o ponto P sobre cada um dos eixos. Se P_x é a projeção de P sobre o eixo x e P_y é a projeção de P sobre o eixo y, afirma-se que as coordenadas de P são (P_x, P_y). Se P_x estiver à direita de O então o valor de P_x é a distância de P_x à O. Se P_x estiver à esquerda de O então o valor de P_x é menos a distância de P_x à O. O mesmo ocorre no eixo y, se P_y estiver acima de O então P_y é igual à distância entre P_y e O e se P_y estiver abaixo de O então P_y é igual a menos a distância de P_y a O.

Na figura abaixo estão representadas as coordenadas, num sistema de eixos cartesianos xy, dos pontos $(-3, 4)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$ e $(2, -4)$.



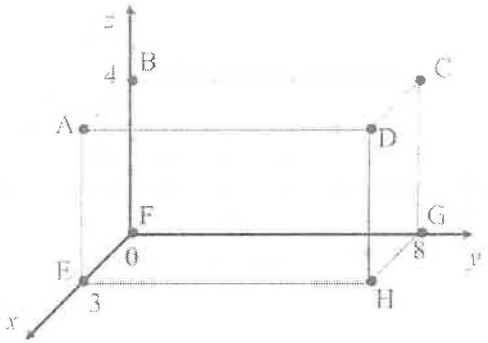
4.4.2. Sistema de Eixos Cartesianos Tridimensional

O sistema de eixos cartesianos tridimensional é composto por três retas orientadas, que se interceptam perpendicularmente, duas a duas, num mesmo ponto O, que é denominado de origem do sistema. De forma ordenada, os pontos de cada eixo representam os números reais, respeitando uma escala pré-definida. O ponto O representa, em cada eixo, o número zero.



Se P é um ponto qualquer do espaço, sejam P_1, P_2 e P_3 as projeções de P sobre os planos xy, xz e yz, respectivamente, como indicado na figura abaixo. As projeções de P_1 e P_2 sobre o eixo x são coincidentes e se chamam P_x. De forma análoga, se definem P_y e P_z. As identificações dos valores associados, em cada eixo, a P_x, P_y e P_z são feitas de forma semelhante ao sistema de eixos bidimensional.

Por exemplo, no sistema cartesiano tridimensional abaixo estão representadas as posições e coordenadas de oito pontos no espaço.

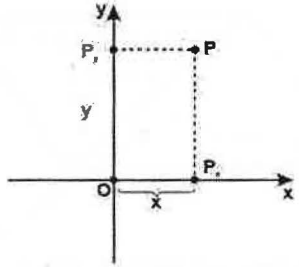


A → (3, 0, 4)
B → (0, 0, 4)
C → (0, 8, 4)
D → (3, 8, 4)
E → (3, 0, 0)
F → (0, 0, 0)
G → (0, 8, 0)
H → (3, 8, 0)

4.4. SISTEMA DE EIXOS CARTESIANOS

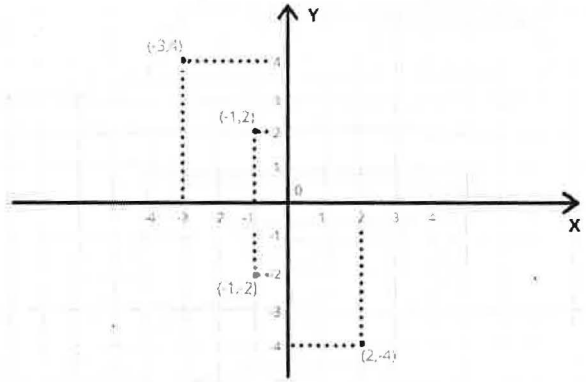
4.4.1. Sistema de Eixos Cartesianos Bidimensional

Considere num plano duas retas orientadas x e y. Em cada reta se define uma escala e um sentido onde os números crescem. Os números reais devem ser colocados, ordenadamente, sobre cada um dos eixos, respeitando a escala definida. O padrão é os números na reta x cresceram pra direita e os números na reta y crescerem pra cima. As retas x e y devem ser perpendiculares, com a interseção O, chamada de origem do sistema, coincidindo com a coordenada 0 de cada reta.



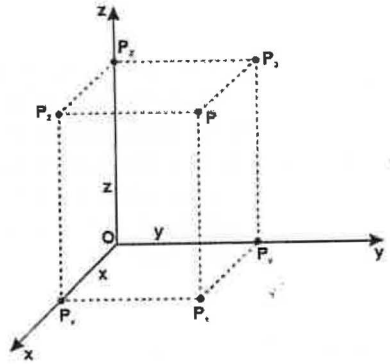
Para determinar as coordenadas de um ponto P nesse plano, projeta-se o ponto P sobre cada um dos eixos. Se P_x é a projeção de P sobre o eixo x e P_y é a projeção de P sobre o eixo y, afirma-se que as coordenadas de P são (P_x, P_y). Se P_x estiver à direita de O então o valor de P_x é a distância de P_x à O. Se P_x estiver à esquerda de O então o valor de P_x é menos a distância de P_x à O. O mesmo ocorre no eixo y, se P_y estiver acima de O então P_y é igual à distância entre P_y e O e se P_y estiver abaixo de O então P_y é igual a menos a distância de P_y a O.

Na figura abaixo estão representadas as coordenadas, num sistema de eixos cartesianos xy, dos pontos (– 3, 4), (– 1, 2), (– 1, – 2) e (2, – 4).



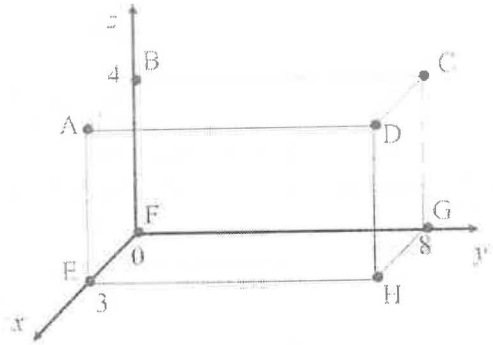
4.4.2. Sistema de Eixos Cartesianos Tridimensional

O sistema de eixos cartesianos tridimensional é composto por três retas orientadas, que se interceptam perpendicularmente, duas a duas, num mesmo ponto O, que é denominado de origem do sistema. De forma ordenada, os pontos de cada eixo representam os números reais, respeitando uma escala pré-definida. O ponto O representa, em cada eixo, o número zero.



Se P é um ponto qualquer do espaço, sejam P_1, P_2 e P_3 as projeções de P sobre os planos xy, xz e yz, respectivamente, como indicado na figura abaixo. As projeções de P_1 e P_2 sobre o eixo x são coincidentes e se chamam P_x. De forma análoga, se definem P_y e P_z. As identificações dos valores associados, em cada eixo, a P_x, P_y e P_z são feitas de forma semelhante ao sistema de eixos bidimensional.

Por exemplo, no sistema cartesiano tridimensional abaixo estão representadas as posições e coordenadas de oito pontos no espaço.



A → (3, 0, 4)
B → (0, 0, 4)
C → (0, 8, 4)
D → (3, 8, 4)
E → (3, 0, 0)
F → (0, 0, 0)
G → (0, 8, 0)
H → (3, 8, 0)

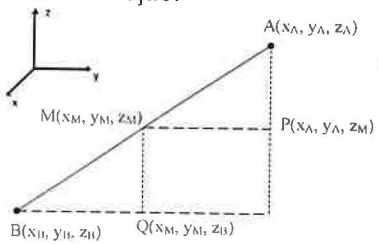
4.4.2.1. Ponto Médio

O ponto médio M de um segmento $\overline{AB}$ é o ponto deste segmento tal que $\overline{AM} = \overline{BM}$

Teorema: Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ dois pontos distintos no espaço. As coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ são:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Demonstração:



A partir de A deve-se traçar uma reta vertical (paralela ao eixo Oz) até encontrar a reta horizontal (paralela ao plano xy) traçada a partir de B. A partir de M traça-se uma reta horizontal e uma vertical, até encontrarem as retas já traçadas a partir de A e B nos pontos P e Q, respectivamente, como indicado na figura.

Assim, conclui-se que:

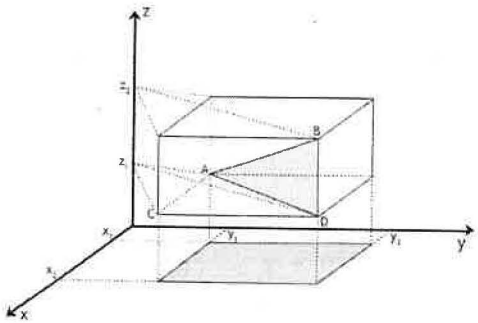
$x_P = x_A$, $y_P = y_A$ e $z_Q = y_B$.

Pelo caso ALA segue que $\Delta AMP \equiv \Delta MBQ$:

$$\overline{MP} \equiv \overline{BQ} \Rightarrow x_A - x_M = x_M - x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente: $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ e $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

4.4.2.2. Distância Entre Dois Pontos



Sejam dois pontos no espaço $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$. Construa um paralelepípedo com diagonal AB. Se AD é uma diagonal da base do paralelepípedo, onde $D(x_2, y_2, z_1)$ então, pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Observando agora o triângulo ABD, também pelo teorema de Pitágoras:

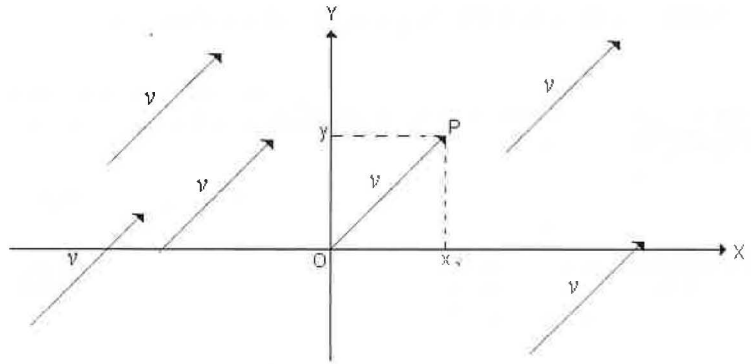
$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Assim, se A(9, – 4, 3) e B(1, 0, 2) então:

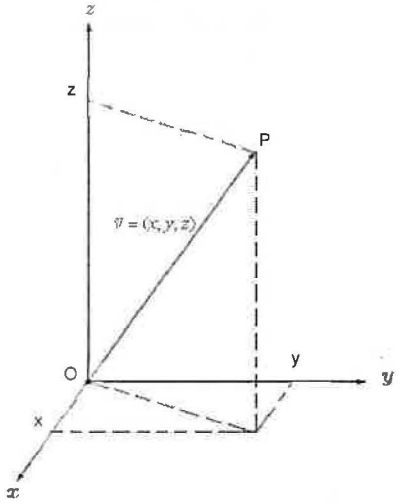
$$\overline{AB} = \sqrt{(1-9)^2 + (0-(-4))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{64+16+1} = \sqrt{81} = 9$$

4.5. AS COMPONENTES DE UM VETOR (FORMA ALGÉBRICA)

Qualquer vetor $v = \overline{AB}$ considerado no plano cartesiano possui sempre uma representação (segmento orientado OP) cujo ponto inicial é a origem. Inicialmente, serão considerados os vetores com origem na origem do sistema. Neste caso, o vetor é determinado pelo ponto extremo do segmento. Assim, ligando a origem ao ponto P(x, y) tem-se o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e escreve-se $\vec{v} = (x, y)$. As coordenadas de P são identificadas como as componentes do vetor.



A todo vetor está associado um módulo (seu comprimento), direção e sentido. Porém, as extremidades de vetor não são fixas. Apesar de ser bastante comum colocar a extremidade do vetor sem a flecha na origem, isso não é obrigatório. Observe na figura acima os seis vetores identificados como $\vec{v}$. São todos iguais, pois todos têm mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.



Também é possível representar um vetor no espaço. Para tanto, é necessário trabalhar nas três dimensões, normalmente denominadas de x, y e z, como indicado na figura ao lado. Se O é a origem do sistema de eixos tridimensionais e P = (x, y, z) a extremidade de um vetor $\overrightarrow{OP}$, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é representado por

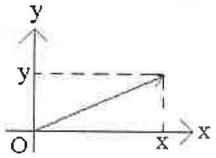
$$\vec{v} = (x, y, z)$$

4.5.1. Igualdade De Vetores (Forma Algébrica)

Dois vetores são iguais se as respectivas componentes são iguais. Assim, os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se e somente se $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Por exemplo, sendo $\vec{u} = (x, 4, z)$ e $\vec{v} = (8, y, 0)$ segue que $\vec{u} = \vec{v}$ se e somente se $x = 8$, $y = 4$ e $z = 0$.

4.6. O MÓDULO DE UM VETOR (FORMA ALGÉBRICA)

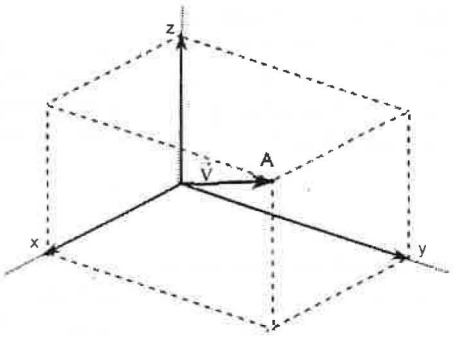


Caso o vetor $\vec{v} = (x, y)$ seja dado em um plano, pode-se determinar seu módulo pelo teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por exemplo, se $\vec{v} = (-4, 3)$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$



Caso o vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ seja dado no espaço, seu módulo é calculado observando que $|\vec{v}|$ é a diagonal de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões $|x|$, $|y|$ e $|z|$, conforme ilustrado na figura ao lado. Desta forma, o módulo de $\vec{v} = (x, y, z)$ vale:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por exemplo, se $\vec{v} = (-2, 1, 2)$ então:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Perceba que o único vetor que possui módulo igual a zero é o vetor cujas componentes são iguais a zero:

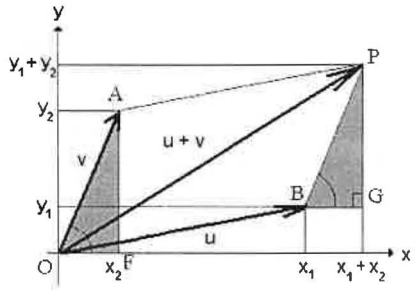
$$|\vec{v}| = 0 \Rightarrow \vec{v} = (0, 0, 0)$$

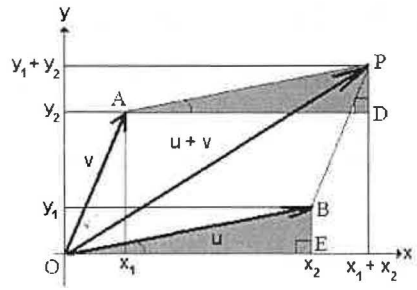
4.7. SOMA DE VETORES (FORMA ALGÉBRICA)

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, define-se a soma entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Verifique como a definição algébrica da soma de vetores concorda com a definição geométrica apresentada anteriormente.





Como OAPB é paralelogramo, tem-se que os triângulos OAF e BPG, da figura 1, são congruentes, por LAA_o. Assim, $\overline{OF} = \overline{BG}$ e então a abscissa de P é $x_1 + x_2$. Analogamente, tem-se que os triângulos ADP e OEB, da figura 2, são congruentes, por LAA_o e assim, $\overline{PD} = \overline{BE}$ e então a ordenada de P é $y_2 + y_1$. Assim, as coordenadas de P são $(x_2 + x_1, y_2 + y_1)$.

Tudo que foi apresentado para a soma de dois vetores em um plano é válido para a soma de dois vetores no espaço. Isto ocorre, pois, dois vetores não paralelos determinam um único plano. A demonstração deste fato é bem simples. Faça coincidir a origem O dos vetores com a origem do sistema de eixos tridimensionais. O ponto O e os extremos A e B dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ determinam um único plano, que é o plano que contém o triângulo OAB. Assim, somando os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ encontra-se:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Por exemplo, se $\vec{u} = (-3, 5, 1)$ e $\vec{v} = (2, -8, 0)$ então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-3+2, 5+(-8), 1+0) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-1, -3, 1)$$

4.7.1. Módulo Da Soma De Dois Vetores (Forma Geométrica)

Considere a figura da página anterior, onde $\theta = \angle A\hat{O}B$ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$. Como AOBP é um paralelogramo, sabe-se que $\angle O\hat{A}P = 180° - \theta$. Aplicando a lei dos cossenos em ΔOAP:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2 - 2.\overline{AO}.\overline{AP}.\cos(180°-\theta) \Rightarrow$$
$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2.|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Por exemplo, se $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e o ângulo entre os $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 60°:

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2.|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta = 2^2 + 3^2 + 2.2.3.\cos 60° = 4+9+12.0{,}5 = 13+6 = 18 \Rightarrow$$
$$|\vec{u}+\vec{v}| = 3\sqrt{2}$$

Observação:

(1) Caso $\theta = 0$ os vetores possuem mesma direção e mesmo sentido e assim o módulo da soma vale $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$;

(2) Caso $\theta = 180°$ os vetores possuem mesma direção e sentidos opostos e assim o módulo da soma vale $|\vec{u}-\vec{v}| = \big||\vec{u}| - |\vec{v}|\big|$.

4.8. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR (FORMA ALGÉBRICA)

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $k \in \mathbb{R}$, a multiplicação de um vetor por um escalar é definida por:

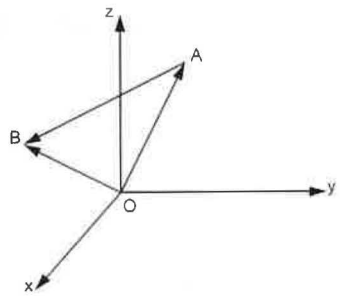
$$\mathbf{k.\vec{u} = (k.x_1, k.y_1, k.z_1)}$$

A definição algébrica do produto por escalar dada acima concorda com a definição geométrica vista anteriormente. O módulo de $\vec{v} = (k.x_1, k.y_1, k.z_1)$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(k.x_1)^2 + (k.y_1)^2 + (k.z_1)^2} = \sqrt{k^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} = |k|\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = |k|\,|\vec{u}|$$

Logo, o módulo de $k.\vec{u}$ é igual ao módulo de $\vec{u}$ multiplicado por $|k|$.

4.9. VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS (FORMA ALGÉBRICA)



Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_a, y_a, z_a)$ e extremidade em $B(x_b, y_b, z_b)$. Da figura:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_b, y_b, z_b) - (x_a, y_a, z_a) \Rightarrow$$
$$\mathbf{\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a).}$$

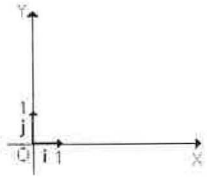
Observação: Sempre que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v} = B - A$, pode-se concluir também que $B = A + \vec{v}$ ou $B = A + \overrightarrow{AB}$, isto é, o vetor $\vec{v}$ transporta o ponto inicial A para o ponto extremo B.

Suponha que os pontos A e B são dados por $A(2, -7, 5)$ e $B(0, 4, -6)$. Assim, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é dado por

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4, -6) - (2, -7, 5) = (0-2, 4-(-7), -6-5) = (-2, 11, -11)$.

4.10. VETOR DEFINIDO PELOS VETORES UNITÁRIOS (FORMA ALGÉBRICA)

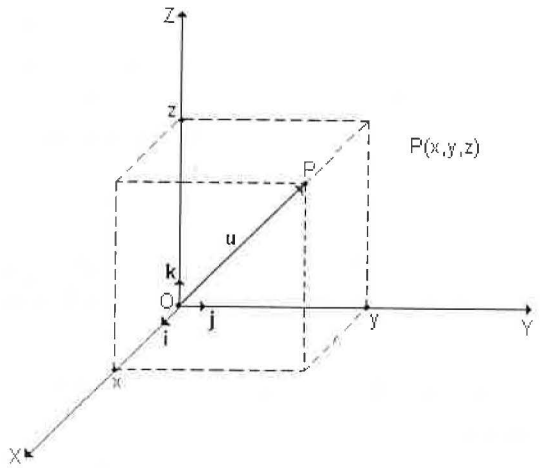
É possível associar um vetor de módulo unitário a cada eixo. O vetor unitário $\vec{i}$ será associado ao eixo x e o vetor unitário $\vec{j}$ ao eixo unitário ao eixo y, conforme figura abaixo:



O par ordenado de vetores unitários $(\vec{i}, \vec{j})$ constitui uma base do plano $\mathbb{R}^2$, ou seja, base do plano cartesiano Oxy. Verifica-se que um vetor $\vec{u} = (x, y)$, pode ser escrito univocamente como:

$$\mathbf{\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}}$$

Analogamente, no espaço IR^3, pode-se considerar os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente, associados aos eixos Ox, Oy e Oz, conforme figura abaixo, e a representação do vetor $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$, no espaço é:



O terno de vetores unitários ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), será a base do espaço IR^3. O módulo do vetor $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ será dado por:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Para demonstração esta fórmula basta verificar que $|\vec{u}|$ é a diagonal de um paralelepípedo de dimensões x, y e z, exatamente como foi feito no item 4.6.

Todas as operações já definidas para vetores da escritos na forma (x, y, z) também valem para vetores escritos na forma $x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Por exemplo, se $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ e $\vec{v} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$ então:

i) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = a$ e $y = b$ e $z = c$

ii) $\vec{u} + \vec{v} = (x + a).\vec{i} + (y + b).\vec{j} + (z + c).\vec{k}$

4.10.1. Versores

Um versor de um vetor $\vec{v}$ não nulo é um vetor de módulo igual a 1 e que tem mesma direção e sentido de $\vec{v}$. A simbologia do versor do vetor $\vec{v}$ é $\hat{v}$ ou vers$\vec{v}$.

Algebricamente, o versor do vetor $\vec{v}$ é igual a $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\vec{v} \neq 0$.

Por exemplo, se $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ então:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

4.10.2. Vetores Paralelos

Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se e somente se existir um número real não nulo λ tal que

$$\vec{v} = \lambda\vec{u}.$$

Do ponto de vista das componentes, dois vetores são paralelos se as razões entre as respectivas componentes forem iguais:

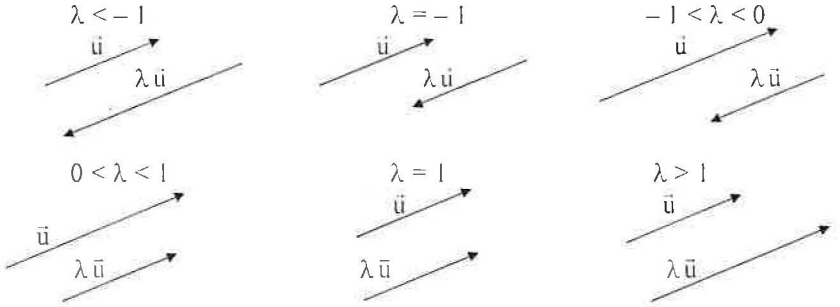
$$\vec{v} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k} = \lambda a_2\vec{i} + \lambda b_2\vec{j} + \lambda c_2\vec{k} \Leftrightarrow$$

$$a_1 = \lambda a_2,\ b_1 = \lambda b_2 \text{ e } c_1 = \lambda c_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

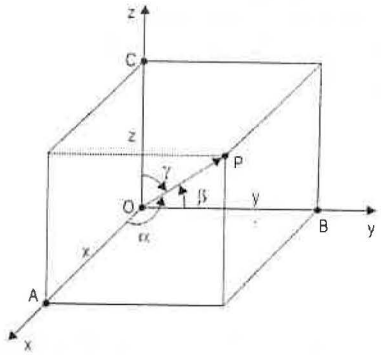
Por exemplo, os vetores $\vec{u} = -5\vec{i} + 15\vec{j} - 10\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$ são paralelos desde que $\dfrac{-5}{3} = \dfrac{15}{-9} = \dfrac{-10}{6}$.

Dois vetores paralelos possuem sempre a mesma direção. Sendo $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, se $\lambda > 0$ então $\vec{v}$ e $\vec{u}$ também possuem mesmo sentido. Se $\lambda < 0$ então $\vec{v}$ e $\vec{u}$ possuem sentidos contrários. Com relação aos módulos, se $\lambda = \pm 1$ tem-se que $\vec{v}$ e $\vec{u}$ têm memo módulo, se $|\lambda| > 1$ então $|\vec{v}| > |\vec{u}|$ e se $|\lambda| < 1$ então $|\vec{v}| < |\vec{u}|$.

Na figura abaixo estão ilustradas as relações de sentidos e módulos de acordo com os valores de λ.



4.10.3. Cossenos Diretores



Considere no espaço um vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, onde O é a origem do sistema de eixos tridimensionais.

Sejam α, β e γ os ângulos formados por $\overrightarrow{OP}$ com os eixos Ox, Oy e Oz, respectivamente. Esses ângulos são denominados de ângulos diretores do vetor $\overrightarrow{OP}$. Note que

$$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 180°.$$

Os cossenos desses ângulos são chamados de cossenos diretores do vetor.

Projetando $\overrightarrow{OP}$ sobre cada eixo obtém-se:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OP}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OP}|} \text{ e } \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OP}|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \text{ e } \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

Por exemplo, os cossenos diretores de $\vec{v} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ são determinados da seguinte maneira:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } \cos\gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4.10.4. Propriedades

(1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Demonstração:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$$

(2) O versor de $\vec{v}$ é $\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$

Demonstração:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{|\vec{v}|} = \frac{x}{|\vec{v}|}\vec{i} + \frac{y}{|\vec{v}|}\vec{j} + \frac{z}{|\vec{v}|}\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

4.11. PRODUTO ESCALAR (FORMA ALGÉBRICA)

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores, que formam um ângulo θ. Define-se o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, que é simbolizado por $\vec{u}.\vec{v}$ como sendo o escalar (número real)

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Observe que esse produto é simbolizado por um ponto. Não é permitido utilizar o sinal ×, pois este será utilizado para outro tipo de produto. Para obter o produto escalar em função das coordenadas dos vetores, multipliquemos inicialmente os vetores unitários:

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 1.1.\cos 90° = 1.1.0 = 0 \quad \text{e} \quad \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1.1.\cos 0° = 1.1.1 = 1$$

Escrevendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em termos dos unitários, o produto $\vec{u}.\vec{v}$ fica:

$$(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2\vec{i}.\vec{i} + x_1y_2\vec{i}.\vec{j} + x_1z_2\vec{i}.\vec{k} + y_1x_2\vec{j}.\vec{i} + y_1y_2\vec{j}.\vec{j} + y_1z_2\vec{j}.\vec{k} + z_1x_2\vec{k}.\vec{i} + z_1y_2\vec{k}.\vec{j} + z_1z_2\vec{k}.\vec{k} =$$
$$= x_1x_2.1 + x_1y_2.0 + x_1z_2.0 + y_1x_2.0 + y_1y_2.1 + y_1z_2.0 + z_1x_2.0 + z_1y_2.0 + z_1z_2.1 =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Caso sejam conhecidas todas as componentes de dois vetores $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$, é mais eficiente calcular o produto escalar pela expressão $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ do que pela definição $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$, que é mais utilizada para determinar o valor de $\cos\theta$. A propósito, pela definição $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$, é fácil verificar que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores perpendiculares, o produto escalar é nulo, pois $\cos 90° = 0$.

Por exemplo, considere os vetores $\vec{u}(2, -4, 3)$ e $\vec{v}(-1, -2, -4)$. O produto escalar destes vetores vale:

$$\vec{u}.\vec{v} = (2).(-1) + (-4).(-2) + (3).(-4) = -2 + 8 - 12 = -6$$

Os casos de perpendicularismo também podem ser analisados por meio do produto escalar. Por exemplo, pode-se determinar o valor de k de modo que os vetores $\vec{u}(1, -2, 7)$ e $\vec{v}(-3, k, -5)$ sejam perpendiculares. Basta impor que o produto escalar seja igual a zero:

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow (1).(-3) + (-2).k + (7).(-5) = 0 \Rightarrow -3 - 2k - 35 = 0 \Rightarrow$$
$$2k = -38 \Rightarrow k = -19$$

4.11.1. Ângulo Entre Dois Vetores (Forma Algébrica)

O ângulo entre dois vetores pode ser calculado a partir do produto escalar entre estes dois vetores. Isolando cos θ na expressão do produto escalar segue que:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Note que cos θ = 0 se e somente se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.

Por exemplo, pode-se determinar o valor de k de modo que o vetor $\vec{v} = (-1, -1, -2)$ forme um ângulo de 60^0 com o vetor $\vec{u} = (k, -4, -2)$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \Rightarrow \cos 60^o = \frac{(k).(-1)+(-4).(-1)+(-2).(-2)}{\sqrt{k^2+(-4)^2+(-2)^2}.\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-k+4+4}{\sqrt{k^2+20}.\sqrt{6}} \Rightarrow \sqrt{6k^2+120} = 2(8-k) \Rightarrow$$

$$6k^2 + 120 = 4(64 - 18k + k^2) \Rightarrow 3k^2 + 60 = 128 - 32k + 2k^2 \Rightarrow$$

$$k^2 + 32k - 68 = 0 \Rightarrow (k + 34)(k - 2) = 0 \Rightarrow k = -34 \text{ ou } k = 2$$

Como $-1 \le \cos\theta \le 1$ segue que

$$-|\vec{u}|.|\vec{v}| \le \vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}|.$$

A igualdade ocorre apenas quando θ = 0, caso em que $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$, ou θ = 180°, situação em que $\vec{u}.\vec{v} = -|\vec{u}|.|\vec{v}|$.

4.11.2. Propriedades Do Produto Escalar

Para o produto escalar são válidas as propriedades:

(1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (comutatividade)

(2) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

(3) $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$ é um vetor, pois $(\vec{u}.\vec{v})$ é um escalar e $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$ é o produto de um escalar por um vetor.

(4) $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w} \neq \vec{u}.(\vec{v}.\vec{w})$ pois $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$ é um vetor com a mesma direção de $\vec{w}$ e $\vec{u}.(\vec{v}.\vec{w})$ é um vetor com a direção de $\vec{u}$.

(5) $k.(\vec{u}.\vec{v}) = (k.\vec{u}).\vec{v}$, $k \in IR$

Exercícios Resolvidos

01) Demonstre que o triângulo A(2, 3, 1), B(2, 1, 0 – 1) e C(2, 2, – 2) é um triângulo retângulo.

Solução:

Determinando os vetores formados pelos lados de ΔABC:

$\vec{AB} = B - A = (0, -2, -2)$

$\vec{AC} = C - A = (0, -1, -3)$

$\vec{BC} = C - B = (0, 1, -1)$

Assim: $\vec{AB}.\vec{BC} = (0, -2, -2).(0, 1, -1) = 0 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC}$

02) Calcular $|\vec{u} + \vec{v}|$ sabendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ e o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 60°.

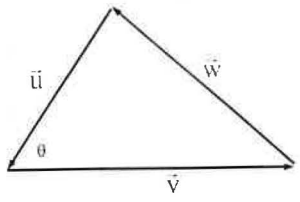
Solução:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta = 16 + 36 - 2.4.6.\frac{1}{2} = 52 - 24 = 28 \Rightarrow$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{7}$$

03) Determinar o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 4$.

Solução:



Se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ então os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um triângulo, como indicado na figura ao lado.

Pela lei dos cossenos:

$|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2.|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta \Rightarrow$

$16 = 4 + 9 - 2.2.3.\cos\theta \Rightarrow 12\cos\theta = -3 \Rightarrow$

$$\cos\theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \theta = \arccos -\frac{1}{4}$$

04) Determine um vetor que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

Solução:

Suponhamos que $\vec{w} = (x, y, z)$ satisfaça $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$.

$\vec{w}.\vec{u} = 0 \Rightarrow (x, y, z).(1, -1, 0) = 0 \Rightarrow x - y = 0$ (1)

$\vec{w}.\vec{v} = 0 \Rightarrow (x, y, z).(1, 0, 1) = 0 \Rightarrow x + z = 0$ (2)

O sistema formado pelas equações (1) e (2) não apresenta solução única.

Todo vetor na forma $\vec{w} = (x, x, -x)$ satisfaz $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$.

05) Calcular o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ e $-\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, sabendo-se que $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ e que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são ortogonais dois a dois.

Solução:

Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são ortogonais dois a dois então $\vec{a}$, $2\vec{b}$ e $-\vec{c}$ também são ortogonais dois a dois e seus módulos são arestas de um paralelepípedo reto retângulo.

Assim: $|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|+|2\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

Analogamente: $|-\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|+|\vec{b}|^2+|2\vec{c}|^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são ortogonais dois a dois: $\vec{a}.\vec{b}=0$, $\vec{a}.\vec{c}=0$ e $\vec{b}.\vec{c}=0$

$(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}).(-\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})=-\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}-2\vec{a}.\vec{c}-2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{b}-2\vec{b}.\vec{c}++\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{c}+2\vec{c}.\vec{c}=$

$=-|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+2|\vec{c}|^2=-1+2+2=3$

$\cos\theta=\dfrac{(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}).(-\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})}{|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|.|-\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}|}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$

06) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares. Determine $\vec{v}$ sabendo que $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{u}.\vec{v}=24$.

Solução:

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, há uma proporcionalidade entre as componentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ então $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}\Rightarrow x=-2z$ e $y=z\Rightarrow\vec{v}=-2z\vec{i}+z\vec{j}+z\vec{k}$

$\vec{u}.\vec{v}=24\Rightarrow(-2,1,1).(-2z,z,z)=24\Rightarrow 4z+z+z=24\Rightarrow 6z=24\Rightarrow$

$z=4\Rightarrow\vec{v}=-8\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$

07) Determine o módulo da projeção do vetor $\vec{v}=(-1,2,3)$ sobre a direção do vetor $\vec{u}=(-2,-3,6)$.

Solução:

Inicialmente, vamos calcular o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$|\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ e $|\vec{u}|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{49}=7$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{v}.\vec{u}}{|\vec{v}|.|\vec{u}|}=\dfrac{(-1,2,3).(-2,-3,6)}{\sqrt{14}.7}=\dfrac{2-6+18}{7\sqrt{14}}=\dfrac{14}{7\sqrt{14}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$

O módulo da projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ vale:

$|\text{proj}\,\vec{v}|=|\vec{v}|.\cos\theta=\sqrt{14}.\dfrac{2}{\sqrt{14}}=2$

08) Determine $\vec{v}$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

i) $|\vec{v}|=\sqrt{24}$;

ii) $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}=(3,-3,0)$;

iii) $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}=(0,2,-1)$.

Solução:

Se $\vec{v}=(x,y,z)$ então $|\vec{v}|=\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{24}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=24$ (1)

$\vec{v}.\vec{u}=0\Rightarrow(x,y,z)(3,-3,0)=0\Rightarrow 3x-3y=0\Rightarrow x=y$ (2)

$\vec{v}.\vec{w}=0\Rightarrow(x,y,z)(0,2,-1)=0\Rightarrow 2y-y=0\Rightarrow z=2y$ (3)

Substituindo (2) e (3) em (1):

$24=x^2+y^2+z^2=y^2+y^2+4y^2=6y^2\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=\pm 2$

Portanto: $\vec{v}=(2,2,4)$ ou $\vec{v}=(-2,-2,-4)$

09) Sabendo que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam dois a dois ângulos de 60° e satisfazem $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=2$ e $|\vec{w}|=1$, determinar o módulo de $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

Solução:

Vamos calcular o produto escalar entre os pares de vetores:

$\vec{u}.\vec{u}=|\vec{u}|^2=16$, $\vec{v}.\vec{v}=|\vec{v}|^2=4$, $\vec{w}.\vec{w}=|\vec{w}|^2=1$, $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos 60^\circ=4.2.\dfrac{1}{2}=4$,

$\vec{u}.\vec{w}=|\vec{u}|.|\vec{w}|.\cos 60^\circ=4.1.\dfrac{1}{2}=2$ e $\vec{v}.\vec{w}=|\vec{v}|.|\vec{w}|.\cos 60^\circ=2.1.\dfrac{1}{2}=1$

$|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2=(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}).(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2+2(\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w})=$

$=16+4+1+2(4+2+1)=21+14=35$

Logo, segue que $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|=\sqrt{35}$

10) Determinar a área do quadrilátero de vértices A = (1, 4, 0), B = (5, – 1, 0), C = (0, – 1, 0) e D = (– 4, 2, 0).

Solução:

A área de um quadrilátero qualquer vale $S=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|.\text{sen}\,\theta$, onde θ é o ângulo formado pelas diagonais $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$.

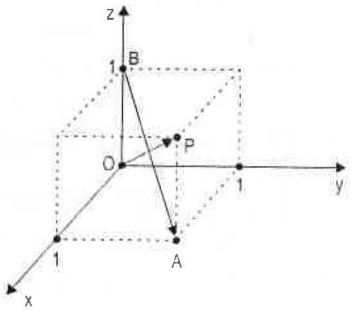
$\overrightarrow{AC}=C-A=(-1,-5,0)$ e $\overrightarrow{BD}=D-B=(-9,3,0)$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{9-15+0}{\sqrt{26}\sqrt{90}}=-\dfrac{6}{3\sqrt{260}}=-\dfrac{2}{\sqrt{260}}\Rightarrow\text{sen}\,\theta=\dfrac{16}{\sqrt{260}}$

$S=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|.\text{sen}\,\theta=\sqrt{26}.\sqrt{90}.\dfrac{16}{\sqrt{260}}=24$

11) Determine o ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

Solução:



Considere a figura ao lado, onde O(0, 0, 0), P(1, 1, 1), A(1, 1, 0) e B(0, 0, 1).

$\vec{OP} = P - O = (1, 1, 1)$

$\vec{BA} = A - B = (1, 1, -1)$

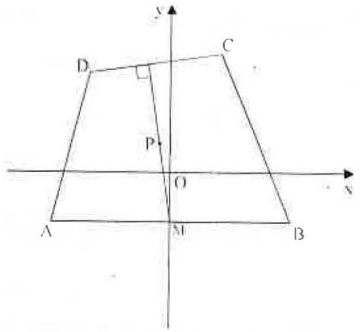
Se θ é o ângulo formado por $\vec{OP}$ e $\vec{BA}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{OP}.\vec{BA}}{|\vec{OP}|.|\vec{BA}|} = \frac{(1, 1, 1).(1, 1, -1)}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1.1 + 1.1 + 1.(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

12) (OBM-01) Em um quadrilátero convexo, a *altura* em relação a um lado é definida como a perpendicular a esse lado passando pelo ponto médio do lado oposto. Prove que as quatro alturas têm um ponto comum se e somente se o quadrilátero é inscritível, isto é, se e somente se existe uma circunferência que contém seus quatro vértices.

Solução:



Considere no plano cartesiano 4 pontos: A, B, C e D.

O ponto médio do lado AB é $M = \frac{A+B}{2}$.

Seja P um ponto dado por $P = \frac{A+B+C+D}{2}$.

O vetor $\vec{MP}$ é dado por:

$$\vec{MP} = P - M = \frac{A+B+C+D}{2} - \frac{A+B}{2} = \frac{C+D}{2}.$$

O vetor $\vec{CD}$ é dado por $\vec{CD} = D - C$.

Note que:

$$\vec{MP}.\vec{CD} = \left(\frac{C+D}{2}\right)(D-C) = \frac{D^2 - C^2}{2} = \frac{|\vec{OD}|^2 - |\vec{OC}|^2}{2}$$

MP é perpendicular a CD $\Leftrightarrow$ $\vec{MP} \perp \vec{CD}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{MP}.\vec{CD} = 0$ $\Leftrightarrow$ $|\vec{OD}| = |\vec{OD}|$ $\Leftrightarrow$ C e D $\in$ circunferência centrada na origem

O mesmo ocorre para as alturas dos outros lados de ABCD, ou seja, as alturas passam por P se e somente se os pontos A, B, C e D estão a uma mesma distância de O, que é equivalente ao quadrilátero ABCD ser inscritível, com centro em O.

4.12. PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial é uma multiplicação entre dois vetores, onde o resultado será também um vetor. A simbolização do produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é $\vec{u} \times \vec{v}$ ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

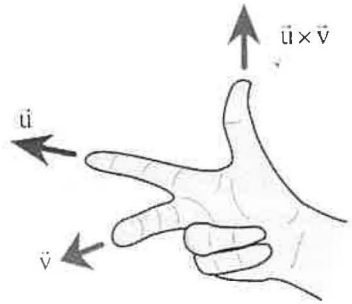
Os sinais x ou $\wedge$ são usados para o produto vetorial e não podem ser substituído pelo ponto (.) que é usado apenas para o produto escalar.

O Produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido como sendo um vetor que apresenta as seguintes características:

MÓDULO: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\mathbf{sen}\,\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos dois vetores.

DIREÇÃO: perpendicular ao plano formado por u e v.

SENTIDO: determinado pela **REGRA DA MÃO DIREITA**, conforme mostra a figura abaixo:



Os dedos indicador, médio e polegar devem estar esticados como indicado na figura, com o dedo médio perpendicular à palma da mão e o polegar apontado para cima. O primeiro vetor $\vec{u}$ do produto vetorial é apontado com o dedo indicador e o segundo vetor $\vec{v}$ é apontado com o dedo médio. O produto $\vec{u} \times \vec{v}$ é apontado com o polegar.

O produto vetorial pode ser calculado a partir das coordenadas dos mesmos. Para isso, inicialmente deve-se determinar os produtos de todos os pares de vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, utilizando a expressão $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\text{sen}\,\theta$ e lembrando que o ângulo formado entre $\vec{i}$ e $\vec{j}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e $\vec{i}$ e $\vec{k}$ é 90° e o ângulo entre $\vec{i}$ e $\vec{i}$, $\vec{j}$ em $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e $\vec{k}$ é 0°.

Assim, tem-se que:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{i} \times \vec{k} = \vec{j},\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Multiplicando $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ por $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ tem-se:

$$(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2\vec{i}\times\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\times\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\times\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\times\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\times\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\times\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\times\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\times\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\times\vec{k} =$$
$$= x_1x_2.0 + x_1y_2.\vec{k} + x_1z_2.\vec{j} - y_1x_2.\vec{k} + y_1y_2.0 + y_1z_2.\vec{i} - z_1x_2.\vec{j} - z_1y_2.\vec{i} + z_1z_2.0 =$$
$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

O resultado encontrado para $\vec{u}\times\vec{v}$, em função das componentes dos vetores pode ser interpretado como o determinante de uma matriz 3×3 onde os elementos da 1ª linha são os vetores unitários em cada eixo, os elementos da 2ª linha são as componentes de $\vec{u}$ e os elementos da 3ª linha são as componentes de $\vec{v}$:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Dados os vetores $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ é dado por:

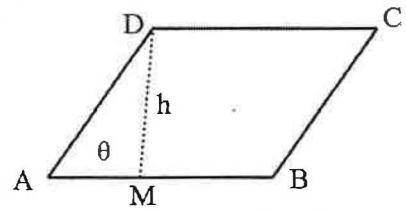
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} - 3\vec{k} - 10\vec{i} - 2\vec{j} = -16\vec{i} + 0\vec{j} - 8\vec{k}$$

4.12.1. Propriedades Do Produto Vetorial

Para o produto escalar são válidas as seguintes propriedades:

(1) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$ (anti-comutativa)
(2) $k.(\vec{u}\times\vec{v}) = (k.\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k.\vec{v})$, $k \in IR$
(3) $\vec{u}\times\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos
(4) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ (associativa)
(5) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$ (distributiva)

4.12.2. Interpretação Geométrica Do Produto Vetorial



Considere o paralelogramo ABCD, abaixo. Sabe-se que a área S desse paralelogramo é:

$$S = \text{base}\times\text{altura} \Rightarrow S = |\overrightarrow{AB}|.h$$

Do triângulo AMD, segue que $h = |\overrightarrow{AD}|.\text{sen}\,\theta$. Deste modo, tem-se que:

$$S = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\text{sen}\,\theta = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$$

Assim, a interpretação geométrica de $|\vec{u}\times\vec{v}|$ é a área do paralelogramo cujos lados consecutivos são $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Inclusive, essa interpretação geométrica ajuda a entender porque $|\vec{u}\times\vec{v}| = 0$ se e somente $\vec{u}//\vec{v}$, uma vez que é gerado um paralelogramo degenerado se lados consecutivos de um paralelogramos sejam paralelos.

Por exemplo, dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, \alpha)$, é possível calcular o valor de α para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$ unidades de área.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\alpha\vec{j} = (\alpha - 1)\vec{i} - (2\alpha + 1)\vec{j} - 3\vec{k}$$

Como $S = |\vec{u}\times\vec{v}|$ segue que:

$$\sqrt{62} = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha+1)^2 + (-3)^2} \Rightarrow 62 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 + 9 \Rightarrow$$
$$62 = 5\alpha^2 + 2\alpha + 11 \Rightarrow 5\alpha^2 + 2\alpha - 51 = 0 \Rightarrow (5\alpha + 17)(\alpha - 3) = 0 \Rightarrow$$
$$\alpha = -17/5 \text{ ou } \alpha = 3$$

4.13. PRODUTO MISTO

O produto misto de três vetores consiste na combinação de produtos escalares e vetoriais na forma $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$. O resultado $\vec{v}\times\vec{w}$ será um vetor que multiplicado escalarmente por $\vec{u}$ resultará em um escalar.

Se $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ e $\vec{w}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$ tem-se:

$$\vec{v}\times\vec{w}=(y_2z_3-y_3z_2)\vec{i}+(x_3z_2-x_2z_3)\vec{j}+(x_2y_3-x_3y_2)\vec{k} \Rightarrow$$
$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=x_1y_2z_3-x_1y_3z_2+y_1x_3z_2-y_1x_2z_3+z_1x_2y_3-z_1x_3y_2,$$

que é um escalar igual ao determinante da matriz

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Por exemplo, se $\vec{u}=-1.\vec{i}+3.\vec{j}+4.\vec{k}$, $\vec{v}=0.\vec{i}-4.\vec{j}-2.\vec{k}$ e $\vec{w}=5.\vec{i}+1.\vec{j}-6.\vec{k}$ então $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$ é igual a

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & -6 \end{vmatrix}=-24-30+0+80-2+0=24$$

4.13.1. Algumas Observações Sobre O Produto Misto

I. $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})\neq(\vec{u}.\vec{v})\times\vec{w}$ o primeiro um escalar e o segundo um vetor.

II. $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

III. Permutações circulares dos três vetores não modifica o produto:

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}.(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}.(\vec{u}\times\vec{v})$$

IV. A troca da ordem de dois vetores modifica o sinal do produto:

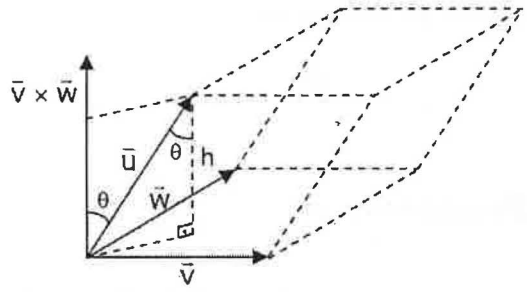
$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}.(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}.(\vec{u}\times\vec{v})=-\vec{u}.(\vec{w}\times\vec{v})=-\vec{v}.(\vec{u}\times\vec{w})=-\vec{w}.(\vec{v}\times\vec{u})$$

4.13.2. Interpretação Geométrica Do Produto Misto

Calculando o módulo do produto misto segue que:

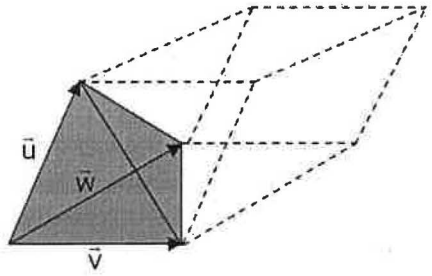
$$|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|=|\vec{u}|.|\vec{v}\times\vec{w}|.\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}\times\vec{w}$. Lembre-se que $\vec{v}\times\vec{w}$ é um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Logo, a expressão $|\vec{u}|\cos\theta$ pode ser interpretada como o módulo da projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}\times\vec{w}$. Como $|\vec{v}\times\vec{w}|$ é igual à área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o produto $|\vec{v}\times\vec{w}|(|\vec{u}|\cos\theta)$ pode ser interpretado como o volume do paralelepípedo formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, como ilustrado na figura abaixo.



$$V_{paralelepípedo}=|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$$

Pela propriedade $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}.(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}.(\vec{u}\times\vec{v})$, o volume do paralelepípedo independe dos vetores que são tomados como base e do vetor que é tomado como altura.



Tome três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no espaço de modo que as origens coincidem no mesmo ponto. Repare que esta configuração sempre é possível. A origem comum e as três extremidades dos vetores formam um tetraedro, conforme indicado na figura. O volume deste tetraedro é igual à um sexto do volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim:

$$V_{tetraedro}=\frac{|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|}{6}$$

Por exemplo, considere no espaço os pontos A(2,1, 3), B(2, 7, 4), C(3, 2, 3) e D(1, – 2, 3). Deseja-se calcular o volume do tetraedro que possui A, B, C e D como vértices. Tomando A como origem, os vetores definidos pelos pontos são $\overrightarrow{AB} = (0, 6, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, -3, 0)$. O volume do tetraedro ABCD é dado por $V_{tetraedro} = \frac{|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|}{6}$.

Calculando o produto misto: $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 3 + 1 + 0 + 0 = -2$

Portanto, o volume do tetraedro ABCD vale:

$$V_{tetraedro} = \frac{|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|}{6} = \frac{|-2|}{6} = \frac{1}{3}$$

Exercícios Resolvidos

01) Determinar um vetor unitário que seja ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

Solução:

Se $\vec{n} \perp \vec{u}$ e $\vec{n} \perp \vec{v}$ então $\vec{n}$ é paralelo a $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} - 3\vec{k} + \vec{i} - 4\vec{j} = 7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

Dessa forma: $\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{7}{5\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{5\sqrt{3}}\vec{k}$

02) Calcular $|\vec{u}|$ sabendo-se que $|\vec{u} \times \vec{v}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 2$ e que o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 45°

Solução:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\operatorname{sen}\theta \Rightarrow 4\sqrt{2} = |\vec{u}|.2.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |\vec{u}| = 4$$

03) Determinar um vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que $\vec{w}.(1, 0, 2) = 3$ e $\vec{w} \times (1, 0, -1) = (-2, 3, -2)$.

Solução:

$$\vec{w}.(1, 0, 2) = 3 \Leftrightarrow (x, y, z).(1, 0, 2) = 3 \Leftrightarrow x + 2z = 3$$

$$\vec{w} \times (1, 0, -1) = (-2, 3, -2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -y\vec{i} + (x + z)\vec{j} - y\vec{k} = (-2, 3, -2) \Leftrightarrow$$

$$y = 2 \text{ e } x + z = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } z = 0 \Rightarrow \vec{w} = (3, 2, 0)$$

04) Sendo $\vec{v} = (1, -1, 1)$, determine um vetor $\vec{u}$ que satisfaça as três condições:

i) $\vec{u}$ é ortogonal ao eixo x;

ii) $\vec{u}.\vec{v} = 0$;

iii) $|\vec{v} \times \vec{u}| = 3\sqrt{6}$.

Solução:

Se $\vec{u} \perp Ox$ então $\vec{u} = (0, y, z)$.

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1, -1, 1).(0, y, z) = 0 \Leftrightarrow -y + z = 0 \Leftrightarrow y = z$$

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = 3\sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = -(y + z)\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k} = -2y\vec{i} - y\vec{j} + y\vec{k}$$

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = 3\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{(-2y)^2 + (-y)^2 + y^2} = 3\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6}.|y| = 3\sqrt{6} \Rightarrow y = \pm 3$$

Assim: $\vec{u} = \pm(0, 3, 3)$

05) Sendo $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u}.\vec{v} = 8$, calcular o valor de $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Solução:

Se θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{10} \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = 6$$

06) Calcule a área do paralelogramo construído sobre os vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e 120° é o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução:

Sabe-se que a área de um paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$S = |(\vec{u} + 2\vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})| = |\cancel{\vec{u} \times \vec{u}}^{0} - \vec{u} \times \vec{v} + 2\vec{v} \times \vec{u} - 2\cancel{\vec{v} \times \vec{v}}^{0}| = |\vec{v} \times \vec{u} + 2\vec{v} \times \vec{u}| =$$

$$= 3|\vec{v} \times \vec{u}| = 3|\vec{v}| \times |\vec{u}|.\operatorname{sen}120° = 3.4.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

07) Determinar a área do paralelogramo construído sobre $\bar{u}$ e $\bar{v}$ cujas diagonais são $\bar{u}+\bar{v}=(0, 3, 5)$ e $\bar{u}-\bar{v}=(2, 1, 1)$.

Solução:

Resolvendo o sistema $\begin{cases}\bar{u}+\bar{v}=(0, 3, 5)\\ \bar{u}-\bar{v}=(2, 1, 1)\end{cases}$ obtém-se $\bar{u}=(1, 2, 3)$ e $\bar{v}=(-1, 1, 2)$

Assim, a área do paralelogramo vale:

$$S=|\bar{u}\times\bar{v}|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=|\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}|=\sqrt{1^2+(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{35}$$

08) Calcular a altura relativa ao vértice B do triângulo de vértices A = (2, 4, 0), B = (0, 2, 4) e C = (6, 0, 2).

Solução:

Note que $\overrightarrow{AB}=B-A=(-2, -2, 4)$ e $\overrightarrow{AC}=C-A=(4, -4, 2)$

Logo, a área do triângulo ABC vale:

$$S=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -2 & 4\\ 4 & -4 & 2\end{vmatrix}}{2}=\frac{|12\vec{i}+20\vec{j}+16\vec{k}|}{2}=|6\vec{i}+10\vec{j}+8\vec{k}|=$$

$$=\sqrt{36+100+64}=10\sqrt{2}$$

Igualando com a fórmula original da área de um triângulo:

$$S=\frac{|\overrightarrow{AC}|.h_B}{2}\Rightarrow 10\sqrt{2}=\frac{\sqrt{16+16+4}.h_B}{2}=\frac{6.h_B}{2}\Rightarrow h_B=\frac{10\sqrt{2}}{3}$$

09) (EN-88) Os vetores $2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ e $a\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ são coplanares. Então a =

a) 1 b) 3/2 c) 2 d) 5/2 e) 3

Solução: Alternativa A

Se os vetores são coplanares então o volume do tetraedro que eles formam é nulo:

$$|\bar{u}.(\bar{v}\times\bar{w})|=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ a & 2 & 3\end{vmatrix}=|24+4a-6+4a-8-18|=|8a-8|=0\Rightarrow a=1$$

10) Os vértices de um tetraedro são M(0, 3, 4), N(– 1, 2, 2) e Q(2, – 1, 2) e P é um ponto pertencente ao eixo Oz.

a) Calcule as coordenadas do ponto P de modo que o tetraedro MNPQ tenha volume igual a 1.

b) Calcule a altura do tetraedro MNPQ relativa à face MNQ.

Solução:

a) Se $P\in Oz$ então P(0, 0, z)

Tomando N como origem, é possível determinar os vetores que são usados como arestas do tetraedro.

$\overrightarrow{MN}=(1, 1, 2)$, $\overrightarrow{QN}=(3, -3, 0)$ e $\overrightarrow{PN}=(1, -2, z-2)$

Sabe-se que o volume de um tetraedro é igual a um sexto do módulo do produto misto dos vetores que formam as arestas do tetraedro.

$$V_{MNPQ}=\frac{|\overrightarrow{MN}.(\overrightarrow{QN}\times\overrightarrow{PN})|}{6}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & -2 & z-2\end{vmatrix}}{6}=\frac{|-3z+6-12+6-3z+6|}{6}=|-z+1|$$

Como o volume do tetraedro é igual a 1:

$|1-z|=1\Rightarrow z=0$ ou $z=2\Rightarrow P(0, 0, 0)$ ou P(0, 0, 2)

b) A área da face MNQ pode ser calculada da seguinte forma:

$$S_{MNQ}=\frac{|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{QN}|}{2}=\frac{\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 0\end{vmatrix}}{2}=\frac{|6\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}|}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

O volume de um tetraedro é igual a um terço do produto da área de uma das faces pela sua altura correspondente.

$$V_{MNPQ}=\frac{S_{MNQ}.h_P}{3}\Rightarrow 1=\frac{3\sqrt{3}.h_P}{3}\Rightarrow h_P=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

11) (EN-86) O módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, que formam um ângulo obtuso, é $\sqrt{41}$ e $|\vec{a}| = 7$ e $|\vec{b}| = 3$. $\overrightarrow{MP}$ tem a direção da bissetriz do ângulo de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{42}$; $\overrightarrow{MQ} = \vec{a} - \vec{b}$. A área do triângulo MPQ é:

a) $10\sqrt{41}$ b) $8\sqrt{42}$ c) $20\sqrt{41}$

d) $4\sqrt{42}$ e) $5\sqrt{41}$

Solução: Alternativa E

Se θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\text{sen}\,\theta \Rightarrow \sqrt{41} = 7.3.\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{41}}{21} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{20}{21}$$

$$|\overrightarrow{MQ}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{MQ}|^2 = 49 + 9 + 2.7.3.\frac{20}{21} = 58 + 40 = 98 \Rightarrow |\overrightarrow{MQ}| = 7\sqrt{2}$$

A direção da bissetriz de dois vetores é obtida somando dois vetores de mesmo módulo. Porém, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm módulos diferentes. Pra resolver esse problema, vamos considerar os vetores $3\vec{a}$ e $7\vec{b}$, que têm mesmo módulo 21. Desta forma, $\overrightarrow{MP}$ e $3\vec{a} + 7\vec{b}$ são vetores paralelos, ou seja, $\overrightarrow{MP} = k(3\vec{a} + 7\vec{b})$, para algum k real positivo.

Note que o ângulo θ formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o mesmo formado por $3\vec{a}$ e $7\vec{b}$

Cálculo do módulo de $3\vec{a} + 7\vec{b}$:

$$|3\vec{a}+7\vec{b}|^2 = |3\vec{a}|^2 + |7\vec{b}|^2 + 2.|3\vec{a}|.|7\vec{b}|.\cos\theta = 21^2 + 21^2 - 2.21.21.\frac{20}{21} =$$

$$= 441 + 441 - 840 = 42$$

Assim: $|3\vec{a} + 7\vec{b}| = \sqrt{42}$

Deste modo: $\overrightarrow{MP} = k(3\vec{a} + 7\vec{b}) \Rightarrow |\overrightarrow{MP}| = k|3\vec{a} + 7\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{42} = k.\sqrt{42} \Rightarrow$

$k = 1 \Rightarrow \overrightarrow{MP} = 3\vec{a} + 7\vec{b}$

Pra calcular a área de ΔMPQ basta calcular a área formada pelos vetores $\overrightarrow{MQ} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\overrightarrow{MP} = 3\vec{a} + 7\vec{b}$:

$$S_{\Delta MPQ} = \frac{|(\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+7\vec{b})|}{2} = \frac{|3\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{0} + 7\vec{a}\times\vec{b} - 3\vec{b}\times\vec{a} - 7\cancel{\vec{b}\times\vec{b}}^{0}|}{2} =$$

$$= \frac{|7\vec{a}\times\vec{b} + 3\vec{a}\times\vec{b}|}{2} = \frac{10|\vec{a}\times\vec{b}|}{2} = 5|\vec{a}|.|\vec{b}|.\text{sen}\,\theta = 5.3.7\frac{\sqrt{41}}{21} = 5\sqrt{41}$$

Exercícios Propostos

01) Sabendo que $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ e $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ calcule o valor de $|\vec{a} - \vec{b}|$.

02) Sabendo que $|\vec{a}| = 11$ e $|\vec{b}| = 23$ e $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$ calcule o valor de $|\vec{a} + \vec{b}|$.

03) Determinar para que valores de α e β os vetores $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ e $\vec{v} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ são colineares.

04) Dados os três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ que satisfazem a condição $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ e sabendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ e $|\vec{c}| = 4$, calcular o valor de $\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$.

05) Cada par de vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formam entre si um ângulo de 60°. Sabendo que $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ e $|\vec{c}| = 6$, determinar o módulo do vetor $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

06) Sabendo que $|\vec{a}| = 3$ e $|\vec{b}| = 5$, determinar para que valor de x os vetores $\vec{a} + x\vec{b}$ e $\vec{a} - x\vec{b}$ são perpendiculares.

07) Que condição devem satisfazer os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de modo que os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ sejam perpendiculares.

08) Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ três vetores não nulos no espaço. Determine o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{u} = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$.

09) Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores não nulos no espaço. Determine o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{u} = \vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}.\vec{b})}{|\vec{a}|^2}$.

10) Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um ângulo de $\frac{\pi}{6}$. Sabendo que $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ e $|\vec{b}| = 1$ determinar o ângulo formado pelos vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

11) Determinar o vetor $\vec{x}$ é perpendicular aos vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e satisfaz a condição $\vec{x}.(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

12) Dados os vetores $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, achar o vetor $\vec{x}$ que é perpendicular ao eixo Oz e satisfaz as condições $\vec{x}.\vec{a} = 9$ e $\vec{x}.\vec{b} = -4$.

13) Calcular o comprimento da projeção do vetor $\vec{u} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ sobre o vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

14) Se $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ e $\vec{a}.\vec{b} = 12$, calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

15) São dados os pontos no espaço A(1, 2, 0), B(3, 0, – 3) e C(5, 2, 6), calcular a área do triângulo ABC.

16) São dados os vértices do triângulo A(1, – 1, 2), B(5, – 6, 2) e C(1, 3, – 1). Calcular o comprimento da sua altura relativa ao vértice B.

17) Calcular a área do tetraedro cujos vértices são A(2, – 1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, – 1) e D(4, 1, 3).

18) Dados os vértices de um tetraedro: A(2, 3, 1), B(4, 1, – 2), C(6, 3, 7) e D(– 5, – 4, 8), determinar o comprimento da altura relativa ao vértice D.

19) O volume de um tetraedro cujos três vértices são A(2, 1, – 1), B(3, 0 1) e C(2, – 1, 3) é igual a 5. Determinar as coordenadas de um quarto vértice D sabendo que pertence ao eixo Oy.

20) Determine z sabendo que A(2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, z) são vértices de um triângulo de área 6.

21) Qual deve ser o valor de m para que os vetores u = (2, m, 0), v = (1, −1, 2) e w = (−1, 3, −1) sejam coplanares?

22) Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u = (3, −1, 4), v = (2, 0, 1) e w = (−2, 1, 5).

23) Calcule o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $v_1 = (0, -1, 2)$, $v_2 = (-4, 2, -1)$ e $v_3 = (3, m, -2)$ seja 33.

24) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°, determinar o ângulo formado pelos vetores $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$.

25) Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ e $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 4$.

26) Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ e $-\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, sabendo-se que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ e que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são mutuamente ortogonais.

27) Determine a e b de modo que sejam colineares os pontos A(3, a, b), B(1, 5, 1) e C(−3, 13, 7).

28) São dados no espaço os pontos A(2, – 1, 0), B(1, – 2, 1) e C(1, 0, 2). Determine o ponto D, tal que $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ sejam coplanares, $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -28$ e que o volume do tetraedro OABD seja igual a 14.

29) Dado o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B, determine a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa AC, sendo A(0, 0, 2), B(3, −2, 8) e C(−3, −5, 10).

30) Considere os pontos A(2, 4, 1), B(3, 3, 5) e C(2, 1, 3).
(a) O triângulo determinado pelos pontos ABC é retângulo? Justifique.
(b) Determine a área do triângulo ABC.

31) Calcule o valor de a para que o vetor $\vec{v} = (-28, 0, -7/2)$ seja mutuamente ortogonal aos vetores $\vec{w} = a\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

32) Os pontos A(2, 1, −1), B(−1, 3, 1) e C(0, −1, 2) formam um triângulo.
(a) Determine a projeção do lado AB sobre o lado CA.
(b) Obtenha, se possível, o valor de c para que o vetor $\vec{v} = (3c + 4, -2, 9)$ seja colinear ao vetor projeção.

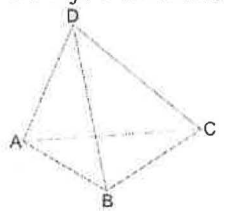
33) Calcule a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto A(3, 2, 1) e uma diagonal de extremidades B(1, 1, −1) e C(0, 1, 2).

34) Determine o vetor unitário ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

35) Demonstre que os pontos A(2, 1, 3), B(3, 2, 4), C(−1, −1, −1) e D(0, 1, −1) são coplanares.

36) Determine o valor de k para que os seguintes vetores sejam coplanares: $\vec{a} = (2, k, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, k)$ e $\vec{c} = (3, 0, -3)$.

37) Considere o tetraedro ABCD, ilustrado a seguir, cujos vértices da base são: A(2, 2, −1), B(3, 2, 1) e C(2, 1, 0). Calcular as coordenadas do vértice D, sobre o eixo x, de forma que o volume do tetraedro seja 8 unidades.



38) Prove que os pontos A(5, 1, 5), B(4, 3, 2) e C(−3, −2, 1) são vértices de um triângulo retângulo.

39) Calcule o volume de um paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, onde $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})$.

40) (EFOMM-13) A matriz $A = (a_{ij})_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ define em IR^3 os vetores $\vec{v}_i = a_{i1}\vec{i} + a_{i2}\vec{j} + a_{i3}\vec{k}$, $1 \le i \le 3$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores em IR^3 satisfazendo?

(1) $\vec{u}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_2$ e $|\vec{u}| = 3$;

(2) $\vec{v}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_3$ e $|\vec{v}| = 2$.

Então, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}+1)\vec{k})$ b) $3\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j} + (\sqrt{2}-1)\vec{k})$

c) $3(\sqrt{2}\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k})$ d) $2\sqrt{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + (1-\sqrt{2})\vec{k})$

e) $-3\sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k})$

41) (EFOMM-17) Um paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u} = (a, a, a)$, $\vec{v} = (2a, 2a, 3a)$ e $\vec{w} = (2a, a, a)$ com $a \in IR_+$ tem volume igual a 8. Determine o valor de a.

a) 1 b) 2 c) 3/2 d) 3 e) 5/2

42) (EFOMM-20) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do IR^3. Sabe-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{v}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{u}| = \frac{3}{2}$ e $|\vec{w}| = 2$. Assinale a opção que apresenta $\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{w}$.

a) 3/7 b) − 13/4 c) − 7/16 d) 5/8 e) 4/7

43) (EFOMM-21) Se α é o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (2, 0, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 3)$, então pode-se afirmar que sen α é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{10}$

44) (EN-89) Sabendo-se que $\vec{n}$ e $\vec{v}$ são vetores que satisfazem as seguintes condições;

I - $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

II - $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$

III - $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ onde $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

Podemos afirmar que o produto vetorial, $\vec{u} \times \vec{v}$, é:

a) $\frac{-16}{9}\vec{i} + \frac{2}{9}\vec{j} + \frac{14}{9}\vec{k}$ b) $\frac{-2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$

c) nulo d) $\frac{-4}{3}\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j} - 2\vec{k}$

e) $\frac{16}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{14}{3}\vec{k}$

45) (EN-91) O vetor projeção de $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ sobre $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ é:

a) $2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ b) $\frac{2\vec{i}}{3} - \frac{2\vec{j}}{3} + \frac{1\vec{k}}{3}$ c) $-2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

d) $-\frac{2\vec{i}}{3} + \frac{2\vec{j}}{3} - \frac{1\vec{k}}{3}$ e) $-6\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$

46) (EN-91) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores unitários tais que:

$|\vec{u} + 2\vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$

O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120°

47) (EN-92) Se $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 4$, o valor máximo de $|\vec{u} + \vec{v}|$ é:

a) 1 b) 3 c) 4 d) 5 e) 7

48) (EN-93) $|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$ são vetores tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ e $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120°

49) (EN-94) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são tais que $|\vec{u}+\vec{v}|=10$ e $|\vec{u}-\vec{v}|=4$. O produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vale:

(A) -1 (B) $2\sqrt{5}$ (C) 21 (D) 29 (E) 40

50) (EN-97) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são unitários e formam um ângulo de 30°. O módulo do vetor soma $(\vec{u}+\vec{v})$ é:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{6}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}+2$ e) $3+\sqrt{2}$

51) (EN-98) A componente do vetor $\vec{u}=(5,6,5)$ na direção do vetor $\vec{v}=(2,2,1)$ é o vetor:

a) $\left(\frac{5}{\sqrt{86}},\frac{5}{\sqrt{86}},\frac{5}{2\sqrt{86}}\right)$ b) $(6,6,3)$ c) $(10,10,5)$

d) $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ e) $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$

52) (EN-99) Se $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=\frac{3}{2}$, $|\vec{v}|=\frac{1}{2}$ e $|\vec{w}|=2$, o valor da soma dos produtos escalares $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ é igual a:

a) 1 b) 0 c) $\frac{-1}{4}$ d) -1 e) $\frac{-13}{4}$

53) (EN-00) Sejam $\vec{u}=(-1,1,0)$ e $\vec{v}=(1,0,1)$ vetores no IR^3. Se θ é o ângulo entre os vetores $(\vec{u}\times\vec{v})$ e $(\vec{u}+2\vec{v})$, então o valor de sen $(\theta/3)$ é

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) 1

54) (EN-01) Sejam $\vec{u}=(-1,0,1+C)$, $\vec{v}=(-1,0,0)$ e $\vec{\omega}=(0,1,-1)$ vetores do $\Re^3$, $C\in\Re$. Se o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $(\vec{v}\times\vec{\omega})$ é $\pi/3$ radianos, então o valor não nulo de C é

(A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3

55) (EN-04) Sabendo que $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}\,3\vec{k}$, $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$ onde $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{p}=3\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{p}$, podemos afirmar que $|\vec{v}-\vec{w}|$ é

a) $\frac{\sqrt{19}}{2}$ b) $\sqrt{4}$ c) $\frac{\sqrt{27}}{4}$ d) $\sqrt{20}$ e) $\frac{\sqrt{53}}{2}$

56) (EN-05) Dados vetores $\vec{a}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, $\vec{b}=(1,0,3)$ e $\vec{c}=(2,-1,1)$, o valor do módulo de $\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é um vetor perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tal que $\vec{v}\cdot\vec{c}=8$ é

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{15}$ d) $\sqrt{17}$ e) $\sqrt{19}$

57) (EN-06) Seja $\vec{w}$ um vetor unitário do IR^3, normal aos vetores $\vec{u}=(-1,1,1)$ e $\vec{v}=(0,-1,-1)$ e com 2ª coordenada positiva. Se θ é o ângulo entre os vetores $\left(\sqrt{2}\vec{w}+\vec{u}\right)$ e $(-\vec{v})$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, então cossec 2θ vale:

a) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ b) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

58) (EN-07) Seja $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-4&5\\0&-1&2\end{pmatrix}$ e $D=\left(d_{ij}\right)_{3x3}=B^2-4B+3I$. Se o número real $N=\sum_{i=1}^{3}d_{ii}$ é o produto escalar dos vetores $\vec{u}=(2,11,1)$ e $\vec{w}=(5,a,4)$, então o valor de tg 2θ, onde θ é o ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$, vale.

a) $-\frac{\sqrt{6}}{19}$ b) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ c) $-\frac{17\sqrt{3}}{20}$ d) $-\frac{12\sqrt{6}}{19}$ e) $\frac{12\sqrt{7}}{20}$

59) (EN-08) Considere $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ vetores do $\Re^3$ que satisfazem ao sistema

$$\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(2,-1,-1)\\ \vec{x}+2\vec{y}+3\vec{z}=(5,-2,-8)\\ \vec{x}+4\vec{y}+9\vec{z}=(15,-6,-24)\end{cases}$$

O produto $\vec{x}\cdot\vec{y}\times\vec{z}$ vale

a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 2

60) (EN-10) Considere:

a) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ vetores não nulos no IR^3

b) a matriz $[v_{ij}]$ que descreve o produto escalar de $\vec{v}_i$ por $\vec{v}_j$, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 4$ e que é dada abaixo:

$$[v_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 2 & -1 & 2 \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & -1 & 3 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

c) o triângulo PQR onde $\overrightarrow{QP} = \vec{v}_2$ e $\overrightarrow{QR} = \vec{v}_3$.

Qual o volume do prisma, cuja base é o triângulo PQR e a altura h igual a duas unidades de comprimento?

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ e) $\sqrt{5}$

61) (EN-10) Um paralelepípedo retângulo tem dimensões x, y e z expressas em unidades de comprimento e nesta ordem, formam uma PG de razão 2. Sabendo que a área total do paralelepípedo mede 252 unidades de área, qual o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (x-2, y-2, z-4)$ e $\vec{w} = (3, -2, 1)$?

a) $\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}$ b) $\operatorname{arcsen}\frac{5\sqrt{14}}{126}$ c) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{5}$

d) $\operatorname{arctg} -5\sqrt{5}$ e) $\operatorname{arcsec}\frac{\sqrt{14}}{3}$

62) (EN-12) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5 \in IR^3$, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$, $\|\vec{v}_1\| = 2$, $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{5}$, $\lambda = \vec{v}_1.\vec{v}_2 + \vec{v}_1.\vec{v}_3 + \vec{v}_2.\vec{v}_3$ e θ o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}_4 = (5, \lambda, -7)$ e $\vec{v}_5 = (1, -2, -3)$, então a área do paralelogramo formado, cujas arestas são representantes de $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$, vale

a) $4\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{3}$ e) 4

63) (EN-13) Nas proposições abaixo, coloque (V) no parênteses à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do IR^3, então $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

( ) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do IR^3 e $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$, onde $\vec{u}.\vec{v}$ representa o produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do IR^3, então eles são paralelos $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

( ) Se $\vec{u} = (3, 0, 4)$ e $\vec{v} = (2, \sqrt{8}, 2)$ então $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$, onde θ representa o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do IR^3.

Lendo-se a coluna de parênteses da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) F F F V V b) F V F F V c) V F V V F

d) F F F V F e) V V V F F

64) (EN-14) Considere $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{u} + \vec{w}$ vetores no IR^3 e θ o ângulo entre os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$. Qual é o valor da expressão $\operatorname{tg}\frac{\theta}{3} + \cos\frac{\theta}{2}$?

a) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2+\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

65) (EN-17) Seja P(x, y) um ponto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Calcule $\vec{PF_1}.\vec{PF_2}$ e assinale a opção correta.

a) $ex^2 + a(1 + 2e^2)$ b) $e^2x - a^2(1 + e)$ c) $e^2x^2 + a^2(1 - 2e)$

d) $e^2x - a(1 + e^2)$ e) $e^2x^2 + a^2(1 - 2e^2)$

GEOMETRIA ANALÍTICA NO IR³

5.1. A EQUAÇÃO DE UM PLANO

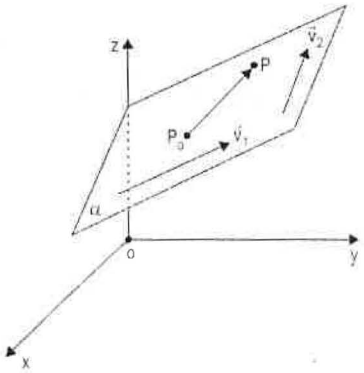
As ideias primitivas de ponto, reta e plano foram apresentadas nos volumes 2 e 5 dessa coleção. Caso o leitor ainda tenha dúvidas desses conceitos, é indicado ler o primeiro capítulo de Geometria Plana e Geometria Espacial dos respectivos volumes.

Há três maneiras de um plano ser determinado, a saber:

i) por um ponto e dois vetores não paralelos;
ii) por dois pontos distintos e um vetor;
iii) por três pontos não colineares.

Agora vamos analisar como determinar a equação de um plano em cada um desses casos:

i) plano determinado por um ponto e dois vetores não paralelos



Considere que um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertence a um plano α e que os vetores $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ são paralelos ao plano α.

Se $P = (x, y, z)$ é um ponto aleatório do plano α, então os vetores $\overrightarrow{PP_0}$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares, implicando que seu produto misto (em qualquer ordem) é nulo:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ao calcular esse determinante obtém-se uma equação do tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

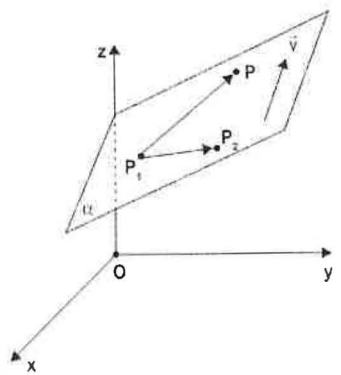
que é denominada de equação geral do plano.

Deste modo, o plano que passa pelo ponto (0, – 1, 3) e é paralelo aos vetores $3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ e $-2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ é dado por

$$0 = \begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20x + 4y + 4 + 3z - 9 + 2x + 12y + 12 + 10z - 30 \Rightarrow$$

$$-18x + 16y + 13z - 23 = 0$$

ii) plano determinado por dois pontos distintos e um vetor



Suponha que os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pertencem a um plano α e que o vetor $\vec{v} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ seja paralelo ao plano α.

Se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer do plano α, então os vetores $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\vec{v}$ são coplanares, ou seja, seu produto misto é nulo:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ao calcular esse determinante obtém-se uma equação do tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

que é denominada de equação geral do plano.

Pode parecer não intuitivo, mas o mesmo plano é gerado se na 1ª linha do determinante fosse escrito $x - x_2$, $y - y_2$ e $z - z_2$:

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

O leitor deve ter percebido que a estratégia pra gerar a equação do plano foi exatamente a mesma do caso anterior: obter 3 vetores coplanares, onde a condição é o determinante formado pelas componentes dos vetores igual a zero.

Por exemplo, suponha que é informado que um plano passa pelos pontos P = (4, 3, – 5) e Q = (2, – 1, 1) e é paralelo ao vetor $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

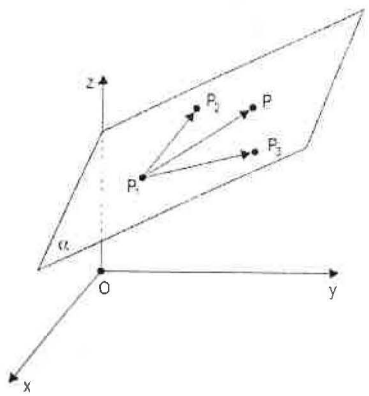
$$0 = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 4-2 & 3-(-1) & -5-1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4x - 8 + 6y + 6 + 4z - 4 + 12x - 24 - 2y - 2 + 4z - 4 =$$

$$= 16x + 4y + 8z - 36$$

Desta forma, já fatorando, a equação do plano é $4x + y + 2z - 9 = 0$.

iii) plano determinado por três pontos não colineares



Se três pontos $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $P_3 = (a_3, b_3, c_3)$ pertencem a um plano α e se $P = (x, y, z)$ representa um ponto geral desse plano, segue que os vetores $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ e $\overrightarrow{P_3P_1}$ são coplanares. fazendo com que seu produto misto seja igual a zero:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ao calcular esse determinante obtém-se uma equação do tipo

$$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$$

que é denominada de equação geral do plano.

Mais uma vez, a estratégia pra determinar a equação do plano é montar um determinante cujos elementos das linhas sejam exatamente as componentes de vetores coplanares. Por esse motivo, o determinante apresentado não é a única opção. Abaixo seguem outras possibilidades de determinantes cujo cálculo permite determinar a equação de um plano que passa por três pontos não alinhados.

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & z_3-z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & z_3-z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Por exemplo, se um plano α passa pelos pontos A = (3, 0, 1), B = (2, 1, 1) e C = (3, 2, 2) então:

$$0 = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2-3 & 1-0 & 1-1 \\ 3-3 & 2-0 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$0 = x - 3 - 2z + 2 + y \Rightarrow x + y - 2z - 1 = 0$$

5.2. CONDIÇÃO PARA UM PONTO PERTENCER A UM PLANO

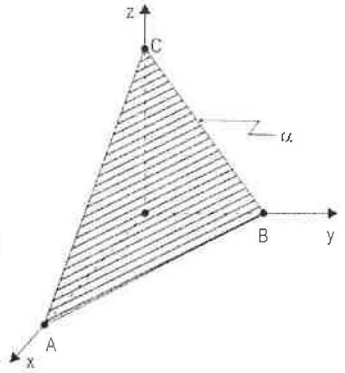
Um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ pertence a um plano α: ax + by + cz + d = 0 se e somente se suas coordenadas satisfazem a equação geral do plano:

$$\mathbf{ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0}$$

Por exemplo, o ponto P = (– 1, 3, 4) pertence ao plano 4x – y + 2z – 1 = 0 desde que 4(– 1) – 3 + 2.4 – 1 = 0.

Por outro lado, o ponto Q = (0, 1, 6) não pertence ao mesmo plano, uma vez que 4.0 – 1 + 2.6 – 1 = 10 ≠ 0.

5.3. INTERSEÇÃO DE UM PLANO COM OS EIXOS COORDENADOS



Suponha que um plano α: ax + by + cz + d = 0 não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados. Sejam A, B e C as interseções de α com os eixos Ox, Oy e Oz, respectivamente. Sabe-se que um ponto pertence ao eixo x se suas componentes y e z são nulas:

$$y_A = z_A = 0$$

Substituindo na equação geral do plano:

$$a.x_A + b.0 + c.0 + d = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{d}{a}$$

Analogamente, encontra-se que:

$$y_B = -\frac{d}{b} \text{ e } z_C = -\frac{d}{c}$$

Por exemplo, no caso do plano α: 3x – 4y + 6z – 36 = 0, se A for a interseção de α com o eixo Ox, B for a interseção de α com o eixo Oy e C for a interseção de α com o eixo Oz, então:

i) $3x_A - 4.0 + 6.0 - 36 = 0 \Rightarrow x_A = 12$

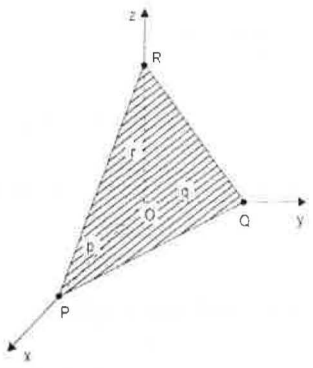
ii) $3.0 - 4y_B + 6.0 - 36 = 0 \Rightarrow y_B = -9$

iii) $3.0 - 4.0 + 6z_C - 36 = 0 \Rightarrow z_C = 6$

Desta forma, as interseções do plano α: 3x – 4y + 6z – 36 = 0 com os eixos coordenados são os pontos A = (12, 0, 0), B = (0, – 9, 0) e C = (0, 0, 6).

Num plano com equação ax + by + cz + d = 0 ocorrer a = 0 ou b = 0 ou c = 0 então o plano não intersecta o respectivo eixo, sendo paralelo ao mesmo. Por exemplo, no plano α: 3x + 4z – 12 = 0, o plano α não intersecta o eixo y.

5.4. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DE UM PLANO



Adote que α é um plano não paralelo a nenhum dos eixos coordenados. Como ilustrado na figura ao lado, α corta o eixo Ox em P, o eixo Oy em Q e o eixo Oz em R, onde $x_P = p \neq 0$, $y_Q = q \neq 0$ e $z_R = r \neq 0$. Nesse caso, é possível obter a equação geral do plano em função apenas de p, q e r.

Sendo $ax + by + cz + d = 0$ a equação geral do plano α, do item anterior segue que

$$p = -\frac{d}{a},\ q = -\frac{d}{b} \text{ e } r = -\frac{d}{c}$$

Dividindo a equação do plano por – d:

$$\frac{x}{-\frac{a}{d}} + \frac{y}{-\frac{b}{d}} + \frac{z}{-\frac{c}{d}} - 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}.$$

que é denominada de **equação segmentária do plano**.

Por exemplo, suponha que um plano α intersecta o eixo Ox no ponto A = (– 1, 0, 0), o eixo Oy no ponto B = (0, 3, 0) e o eixo Oz no ponto C = (0, 0, 2). Deste modo, a equação segmentária de α é:

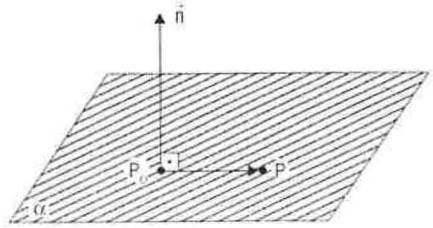
$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 \overset{\times 6}{\Rightarrow} -6x + 2y + 3z = 6 \Rightarrow 6x - 2y - 3z + 6 = 0$$

Observe que nem todo plano possui equação segmentária. Há duas condições que devem ser satisfeitas para que um plano tenha equação segmentária:

(i) o plano não pode passar pela origem do sistema de eixos coordenados. O motivo pra isso é bem simples: teríamos uma divisão por zero na expressão $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$.

(ii) o plano deve intersectar todos os eixos coordenados, ou seja, o plano não pode ser paralelo a nenhum dos eixos coordenados. O motivo pra isso é também é bem simples: na expressão $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ os valores de p, q e r são as coordenados onde o plano cruza cada eixo e se não cruzar um determinado eixo algum desses números não existe.

5.5. PLANO NORMAL A UM VETOR E QUE PASSA POR UM PONTO



O objetivo agora é determinar a equação do plano α que seja normal a um dado vetor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Se P = (x, y, z) é um ponto qualquer do plano α, então os vetores $\overrightarrow{PP_0}$ e $\vec{n}$ são ortogonais, implicando que seu produto escalar seja igual a zero:

$$\overrightarrow{PP_0}.\vec{n} = 0 \Rightarrow ((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}).(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0 \Rightarrow \mathbf{ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0}$$

Por exemplo o plano normal ao vetor $2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ e que passa por (1, 3, 0) é:

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \Rightarrow 2x - 5y - 3z - (2.1 - 5.3 - 3.0) = 0 \Rightarrow$$
$$2x - 5y - 3z + 13 = 0$$

Esse resultado é muito importante pra entender a equação geral de um plano. Agora é possível afirmar que $ax + by + cz + d = 0$ é a equação geral de um plano α se e somente se $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é o **vetor normal** a esse plano α. Além disso, esse resultado ajuda a justificar os casos particulares da equação de um plano, a saber:

(1) Equação do tipo **ax + by + cz = 0** $\Rightarrow$ plano passa pela origem
Porquê? O(0, 0, 0) satisfaz a equação do plano.

(2) Equação do tipo **by + cz + d = 0** $\Rightarrow$ plano paralelo ao eixo x
Porquê? $\vec{n}_x = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp Ox \Rightarrow$ plano α é paralelo a Ox

(3) Equação do tipo **ax + cz + d = 0** $\Rightarrow$ plano paralelo ao eixo y
Porquê? $\vec{n}_y = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp Oy \Rightarrow$ plano α é paralelo a Oy

(4) Equação do tipo **ax + by + d = 0** $\Rightarrow$ plano paralelo ao eixo z
Porquê? $\vec{n}_z = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp Oz \Rightarrow$ plano α é paralelo a Oz

(5) Equação do tipo **by + cz = 0** $\Rightarrow$ plano contém o eixo x
Porquê? α é paralelo a Ox e contém O(0, 0, 0) $\Rightarrow$ α contém Ox

(6) Equação do tipo **ax + cz = 0** $\Rightarrow$ plano contém o eixo y
Porquê? α é paralelo a Oy e contém O(0, 0, 0) $\Rightarrow$ α contém Oy

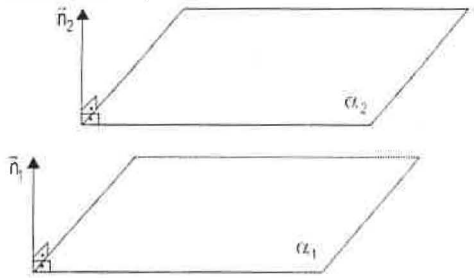
(7) Equação do tipo **ax + by = 0** $\Rightarrow$ plano contém o eixo z
Porquê? α é paralelo a Oz e contém O(0, 0, 0) $\Rightarrow$ α contém Oz

(8) Equação do tipo **cz + d = 0** $\Rightarrow$ plano paralelo ao plano xy
Porquê? α é paralelo a Ox e Oy.

(9) Equação do tipo **by + d = 0** $\Rightarrow$ plano paralelo ao plano xz
Porquê? α é paralelo a Ox e Oz.

(10) Equação do tipo **ax + d = 0** $\Rightarrow$ plano paralelo ao plano yz
Porquê? α é paralelo a Oy e Oz.

5.6. CONDIÇÃO DE PARALELISMO



Considere os planos

$\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Do item anterior, sabe-se que os vetores normais aos planos α_1 e α_2 são, respectivamente:

$$\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$

Os planos α_1 e α_2 são paralelos se e somente se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são paralelos:

$$\alpha_1 // \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Caso ocorra $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ então os planos α_1 e α_2 são coincidentes.

Por exemplo, os planos $2x - 3x + 5z + 20 = 0$ e $6x - 9x + 15z - 9 = 0$ são paralelos uma vez que:

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{5}{15}$$

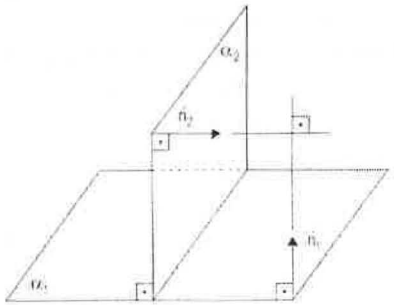
Note que esses planos, apesar de paralelos, não são coincidentes, pois a razão dos termos independentes $\frac{20}{-9}$ não é igual a razão entre os coeficientes de x, y e z.

Por outro lado, é possível identificar que os planos $x + y - 2z + 5 = 0$ e $2x + 2y - 4z + 10 = 0$ são coincidentes, desde que:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{5}{10}.$$

Observação: Na análise do paralelismo entre dois planos deve-se ignorar os casos em que $a_1 = a_2 = 0$ ou $b_1 = b_2 = 0$ ou $c_1 = c_2 = 0$. Por exemplo, os planos $2x - 3z + 1 = 0$ e $10x - 15z + 7 =$ são paralelos, desde que $\frac{2}{5} = \frac{-3}{-15}$. Caso fôssemos escrever a razão entre os coeficientes de y, seria escrito um $\frac{0}{0}$, que é uma indeterminação.

5.7. CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE



Suponha que α_1 e α sejam planos, com equações gerais dadas por:

$\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Os vetores normais aos planos α_1 e α_2 são, respectivamente:

$$\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$

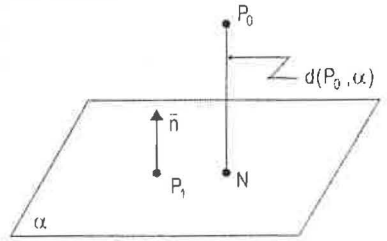
Os planos α_1 e α_2 são ortogonais se e somente se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são perpendiculares:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 = 0}$$

De acordo com o exposto, é possível afirmar que os planos $\alpha_1: -4x + y - 3z + 5 = 0$ e $\alpha_2: x + 7y + z - 1 = 0$ são ortogonais, desde que os vetores normais são $\vec{n}_1 = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{n}_2 = \vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$ e produto escalar vale:

$$\vec{n}_1.\vec{n}_2 = (-4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}).(\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}) = -4 + 7 - 3 = 0$$

5.8. DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM PLANO



Um plano α tem equação geral dada por:

$ax + by + cz + d = 0.$

Deseja-se determinar a distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano α. Considere que N é a projeção de P_0 sobre α, ou seja, $N \in \alpha$ e $\overrightarrow{NP_0} \perp \alpha$.

Sendo $N = (x_1, y_1, z_1)$ e como $N \in \alpha$:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

Sabe-se que $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é o vetor normal ao plano α. Assim, o ângulo formado entre $\overrightarrow{NP_0}$ e $\vec{n}$ é 0° ou 180°:

$$|\overrightarrow{NP_0}|.|\vec{n}| = \pm\overrightarrow{NP_0}.\vec{n} \Rightarrow \left|\overrightarrow{NP_0}\right|.|\vec{n}| = \left|\overrightarrow{NP_0}.\vec{n}\right| \Rightarrow$$

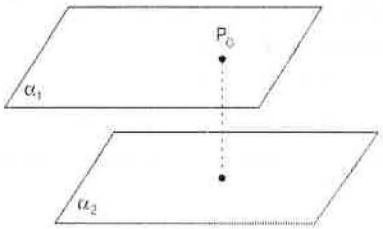
$$d(P_0,\alpha).\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)| \Rightarrow$$

$$d(P_0,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 - (ax_1 + by_1 + cy_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \mathbf{d(P_0,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Assim, a distância de $(5, -3, 1)$ ao plano $-2x + y + 2z - 1 = 0$ vale:

$$\frac{|-2.5 + (-3) + 2.1 - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-10 - 3 + 2 - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4$$

5.9. DISTÂNCIA ENTRE PLANOS PARALELOS



Dois planos são paralelos se e somente se têm o mesmo vetor normal, fazendo com que suas equações gerais sejam da forma:

α_1: $ax + by + cz + d_1 = 0$

α_2: $ax + by + cz + d_2 = 0$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertence ao plano α_1 então $ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1 = 0$.

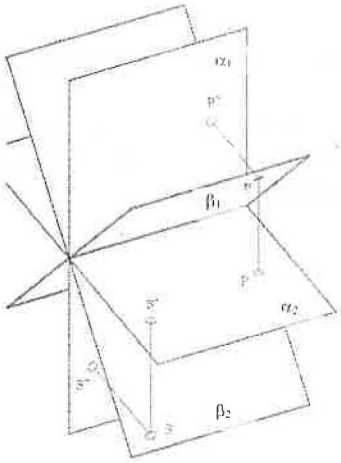
A distância entre α_1 e α_2 é igual à distância entre P_0 e α_2:

$$d(\alpha_1,\alpha_2) = d(P_0,\alpha_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 + d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \mathbf{d(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Assim, a distância entre os planos $6x - 2y + 3z + 11 = 0$ e $6x - 2y + 3z - 3 = 0$ é igual a:

$$\frac{|-3-11|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2$$

5.10. PLANOS BISSETORES



Se α_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e α_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ são dois planos secantes no espaço, os planos bissetores de α_1 e α_2 são definidos como os planos β_1 e β_2 que dividem ao meio os ângulos diedros formados por α_1 e α_2. Como consequência, qualquer ponto de β_1 e β_2 estão a mesma distância de α_1 e α_2:

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1y + d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2y + d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{\frac{a_1x + b_1y + c_1y + d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2y + d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

Desenvolvendo essa expressão duas vezes, uma pro sinal + e outra pro sinal –, encontram-se as equações dos planos bissetores.

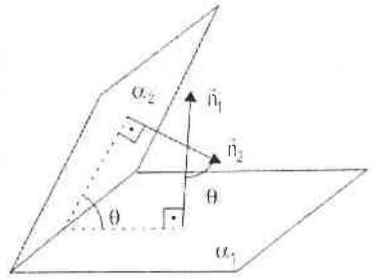
Desta forma, os planos bissetores de $2x + 2y - z + 3 = 0$ e $3x - 4z + 5 = 0$ são:

$$\frac{2x+2y-z+3}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \pm\frac{3x-4z+5}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}} \Rightarrow \frac{2x+2y-z+3}{3} = \pm\frac{3x-4z+5}{5}$$

i) $10x + 10y - 5z + 15 = 9x - 12z + 15 \Rightarrow x + 10y - 5z = 0$

ii) $10x + 10y - 5z + 15 = -9x + 12z - 15 \Rightarrow 19x + 10y - 17z + 30 = 0$

5.11. ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS



Adote que α_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e α_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ são dois planos secantes no espaço. O ângulo agudo θ formado por α_1 e α_2 coincide com o menor ângulo formado pelos vetores normais aos planos, como indica a figura ao lado.

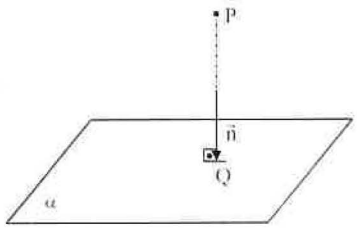
Como os vetores normais são dados por $\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$, então:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} \Rightarrow \mathbf{\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

Por exemplo, o ângulo formado pelos planos $3x - 6y - 2z + 1 = 0$ e $x - 4y + 8z - 3 = 0$ vale:

$$\cos\theta = \frac{|3.1+(-6).(-4)+(-2).8|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+8^2}} = \frac{11}{7.9} = \frac{11}{63} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{11}{63}$$

5.12. PROJEÇÃO DE UM PONTO SOBRE UM PLANO



Sejam α: $ax + by + cz + d = 0$ um plano e $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto. Deseja-se obter o ponto Q, que é a projeção de P sobre α. Sabe-se que o vetor normal ao plano é $\vec{n} = (a, b, c)$. Porém, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ também é perpendicular ao plano α, ou seja, $\overrightarrow{PQ} // \vec{n}$, fazendo com que $\overrightarrow{PQ} = k.\vec{n}$, onde k é um número real positivo.

Modulando esse último resultado: $k = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}$.

Pra determinar Q basta fazer:

$$\overrightarrow{PQ} = k.\vec{n} \Leftrightarrow Q - P = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{n} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Q = (x_0, y_0, z_0) + \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c)}$$

Exercícios Resolvidos

01) Obter a equação do plano que contém os pontos A = (3, 0, 1), B = (2, 1, 1) e C = (3, 2, 2).

Solução:

Se P = (x, y, z) um ponto aleatório do plano, então o plano é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AP}$ = P – A = (x – 3, y, z – 1). $\overrightarrow{AB}$ = B – A = (–1, 1, 0), $\overrightarrow{BC}$ = C – B = (1, 1, 1)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-3-z+1+y-z+1=0 \Rightarrow x+y-2z-1=0$$

02) Obter o plano α que contém P = (0, 1, 2) e é ortogonal aos planos α_1: x + y – z + 5 = 0 e α_2: 2x + 2y + z + 1 = 0.

Solução:

Como α é ortogonal a α_1 e α_2 então o vetor normal $\vec{n}$ de α é ortogonal aos vetores normais $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$ de α_1 e $\vec{n}_2 = (2, 2, 1)$ de α_2.

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$

Se Q = (x, y, z) é um ponto qualquer do plano α, então $\overrightarrow{PQ}$ = Q – P = (x, y – 1, z – 2) é um vetor paralelo ao plano α. Desde que $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}$:

$\overrightarrow{PQ}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x, y-1, z-2).(3, -3, 0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

03) Dado o ponto P = (3, 6, 1) e um plano α: x + y + z – 13 = 0, achar o ponto P', simétrico de P em relação a α.

Solução:

Se Q é a projeção de $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre o plano α: ax + by + cz + d = 0:

$$Q = (x_0, y_0, z_0) + \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c) \Rightarrow$$

$$Q = (3, 6, 1) - \frac{|1.3 + 1.6 + 1.1 - 13|}{1^2 + 1^2 + 1^2}(1, 1, 1) = (3, 6, 1) + (1, 1, 1) = (4, 7, 2)$$

Q é o ponto médio do segmento PP':

$x_P + x_{P'} = 2x_Q \Rightarrow 3 + x_{P'} = 8 \Rightarrow x_{P'} = 5$

$y_P + y_{P'} = 2y_Q \Rightarrow 6 + y_{P'} = 14 \Rightarrow y_{P'} = 8$

$z_P + z_{P'} = 2z_Q \Rightarrow 1 + z_{P'} = 4 \Rightarrow z_{P'} = 3$

Assim, o simétrico de P em relação a α é (5, 8, 3)

04) (EN-88) A distância entre os planos x + 2y – 2z + 1 = 0 e 2x + 4y – 4z + 5 = 0 é:

a) 1/2 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução: Alternativa A

Multiplicando a equação do primeiro plano por 2: 2x + 4y – 4z + 2 = 0

Assim, a distância entre os planos vale:

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{|5-2|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

05) (EFOMM-14) Seja ax + by + cz + d = 0 a equação do plano α que passa pelos pontos A(4, – 2, 2) e B(1, 1, 5) e é perpendicular ao plano β: 3x – 2y + 5z – 1 = 0. A razão $\frac{d}{b}$ é

a) – 5/4 b) 4/7 c) 8 d) – 1/2 e) 2/5

Solução: Alternativa A

O vetor normal do plano β é $\vec{n}_\beta = (3, -2, 5)$

O vetor $\overrightarrow{AB}$ = B – A = (–3, 3, 3) é paralelo ao plano α.

O vetor normal do plano α é ortogonal a $\vec{n}_\beta$ e $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -21\vec{i} - 24\vec{j} + 3\vec{k}$$

Se P = (x, y, z) é um ponto qualquer do plano α, então $\overrightarrow{BP}$ = P – B = (x – 1, y – 1, z – 5) é um vetor paralelo ao plano α. Desde que $\overrightarrow{BP} \perp \vec{n}_\alpha$:

$\overrightarrow{BP}.\vec{n}_\alpha = (x-1, y-1, z-5).(-21, -24, 3) = 0 \Rightarrow$

$-21x + 21 - 24y + 24 + 3z - 15 = 0 \Rightarrow -21x - 24y + 15z + 30 = 0 \Rightarrow$

$b = -24$ e $d = 30 \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{30}{-24} = -\frac{5}{4}$

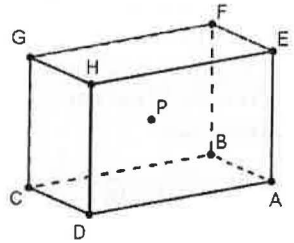
06) Determinar o valor de k para que seja de 60° o ângulo entre os planos α_1: kx + 2y + 2z + 1 = 0 e α_2: x – y + z + 3 = 0.

Solução:

$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|k.1 + 2.(-1) + 2.1|}{\sqrt{k^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$2|k| = \sqrt{3(k^2 + 8)} \Rightarrow 4k^2 = 3k^2 + 24 \Rightarrow k^2 = 24 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{6}$

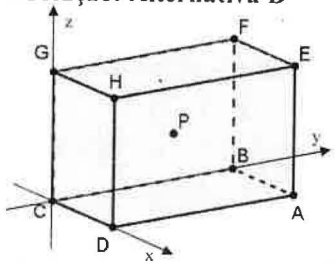
07) (EN-24) Analise a figura a seguir:



Seja o paralelepípedo reto retângulo ABCDEFGH com medidas AB = 4 cm, AD = 8 cm e AE = 5 cm, conforme a figura acima. Considerando o ponto P como o centro do paralelepípedo, é correto afirmar que a distância, em cm, de P ao plano BDE é igual a:

a) $\frac{10}{\sqrt{189}}$ b) $\frac{20}{\sqrt{189}}$ c) $\frac{35}{2\sqrt{105}}$ d) $\frac{30}{\sqrt{189}}$ e) $\frac{35}{\sqrt{105}}$

Solução: Alternativa B



Observe a disposição dos eixos tridimensionais na figura ao lado. Devido às dimensões indicadas do paralelepípedo, os pontos P, B, D e E têm as seguintes coordenadas:

P(2, 4, 5/2), B(0, 8, 0), D(4, 0, 0) e E(4, 8, 5)

Se Q(x, y, z) é um ponto aleatório do plano BDE, então os vetores $\overrightarrow{BQ} = (x, y-8, z)$, $\overrightarrow{BD} = (4, -8, 0)$ e $\overrightarrow{BE} = (4, 0, 5)$ são paralelos ao plano BDE.

$$\begin{vmatrix} x & y-8 & z \\ 4 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -40x - 20y + 160 + 32z = 0 \Leftrightarrow 10x + 5y - 8z - 40 = 0$$

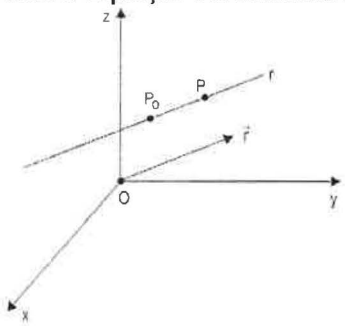
$$d(P, BDE) = \frac{|ax_P + by_P + cy_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|20 + 20 - 20 - 40|}{\sqrt{10^2 + 5^2 + (-8)^2}} = \frac{20}{\sqrt{189}}$$

5.13. EQUAÇÃO DA RETA NO IR³

A equação de uma reta no espaço é bem diferente da equação de uma reta no plano cartesiano. Não é possível caracterizar a equação de uma reta no espaço apenas em uma expressão envolvendo as coordenadas x, y e z.

Existem várias formas de escrever a equação de uma reta. O leitor verá que cada forma é mais adequada a depender de como a reta é caracterizada. Uma reta pode ser definida por dois pontos distintos ou por um ponto de uma direção (vetor) ou pela interseção de dois planos secantes.

5.13.1. Equação Paramétrica da Reta



A equação paramétrica da reta deve ser adotada quando a reta for definida por um ponto e uma direção, que é a direção de um vetor não nulo. Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ um vetor. Se P = (x, y, z) é um ponto aleatório da reta r que passa por P_0 e é paralela ao vetor $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{PP_0} = \lambda.\vec{v}, \lambda \in IR \Rightarrow$$

$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} = \lambda a\vec{i} + \lambda b\vec{j} + \lambda c\vec{k}$$

Desta forma, segue que:

$$\mathbf{x = x_0 + \lambda a,\ y = y_0 + \lambda b\ e\ z = z_0 + \lambda c}$$

Apesar do título do item ser "Equação Paramétrica da Reta", na prática são três equações, uma pra cada variável.

O vetor $\vec{v}$ é conhecido como vetor diretor da reta. Perceba que seu sentido não é importante, apenas sua direção. Caso fosse tomado $-\vec{v}$ como vetor diretor no lugar de $\vec{v}$, a reta teria as mesmas três equações paramétricas, bastando escrever $-\lambda$ no lugar de λ.

Por exemplo, as equações paramétricas da reta que passa por (– 6, 2, 4) e é paralela ao vetor $-\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ são:

$$x = -6 - \lambda,\ y = 2 - 5\lambda \text{ e } z = 4 + 2\lambda.$$

Caso alguma componente do vetor diretor seja nula, a coordenada da reta nessa direção é constante. Por exemplo, as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (8, – 9, 1) e é paralela ao vetor $-3\vec{j} + 7\vec{k}$ são:

$$x = 8,\ y = -9 - 3\lambda \text{ e } z = 1 + 7\lambda$$

Perceba que a equação paramétrica de uma reta no IR³ nunca é única. Por exemplo, o ponto (8, – 12, 8) também pertence à reta supracitada e o vetor diretor pode ser tomado como $6\vec{j} - 14\vec{k}$, desde que o que importa é sua direção. Assim, outra forma de representar essa reta é

$$x = 8,\ y = -12 + 6t \text{ e } z = 8 - 14t$$

5.13.2. Equação Simétrica da Reta

A equação simétrica de uma reta também pode ser adotada quando foi conhecido um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ que pertence à reta e o vetor diretor $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ da reta. Analogamente ao caso da equação simétrica:

$$\overrightarrow{PP_0} = \lambda.\vec{r}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = \lambda a\vec{i} + \lambda b\vec{j} + \lambda c\vec{k} \Rightarrow$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Essa última expressão é conhecida como equação simétrica da reta. A bem da verdade, não é **uma** equação e sim são **duas** equações, devido aos dois sinais de igualdade.

Apenas como aplicação, a equação simétrica da reta que passa pelo ponto $P_0 = (1, -5, -6)$ e é paralela ao vetor $\vec{r} = -3\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$ é $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+5}{7} = \frac{z+6}{-2}$.

Caso o vetor diretor tenha alguma componente nula é permitido adotar um abuso de notação e escrever uma divisão por zero. Por exemplo, a equação simétrica da reta que passa por (0, 2, 4) e é paralela a $-9\vec{i} + 3\vec{k}$ é $\frac{x}{-9} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{3}$. Na prática, isso significa que a coordenada y da reta é constante e igual a 2.

É importante destacar que, de forma análoga ao caso da equação paramétrica, a equação simétrica também nunca é única. Por exemplo, é possível representar de outra maneira a equação da reta que passa por $P_0 = (1, -5, -6)$ e é paralela ao vetor $\vec{r} = -3\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$. Note que o ponto $P_1 = (-2, 2, -8)$ também pertence a essa reta e o vetor diretor pode ser tomado como $\vec{r}' = 9\vec{i} - 21\vec{j} + 6\vec{k}$, que é um vetor paralelo a $\vec{r}$. Portanto, outra maneia de escrever a equação simétrica da reta é

$$\frac{x+2}{9} = \frac{y-2}{-21} = \frac{z+8}{6}.$$

Repare que não é difícil obter a equação simétrica a partir da paramétrica e vice versa. Por exemplo, se

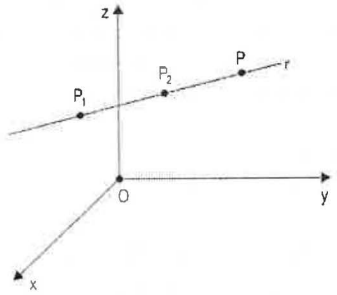
$$x = x_0 + a\lambda, \quad y = y_0 + b\lambda \quad \text{e} \quad z = z_0 + c\lambda$$

é a equação paramétrica de uma reta, então

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

é a equação simétrica da reta.

5.13.3. Equação Da Reta Que Passa Por Dois Pontos



Sabe-se que por dois pontos distintos passa uma única reta. Vamos agora mostrar como determinar a equação simétrica de uma reta r que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Suponha que $P = (x, y, z)$ é um ponto aleatório da reta r. Como o vetor diretor da reta r é

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

segue que a equação simétrica da reta r é dada por:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Deste modo, a equação simétrica da reta que passa pelos pontos (4, – 7, – 3) e (5, 2, – 8) é $\frac{x-4}{1} = \frac{y+7}{9} = \frac{z+3}{-5}$.

Caso os dois pontos tenham determinada coordenada iguais, é permitido escrever uma divisão por zero na equação simétrica da reta. Por exemplo, a equação simétrica da reta que passa por (3, 1, – 5) e (2, 1, 3) é $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{8}$. Isso apenas significa que a coordenada y de qualquer ponto da reta é sempre igual a 1.

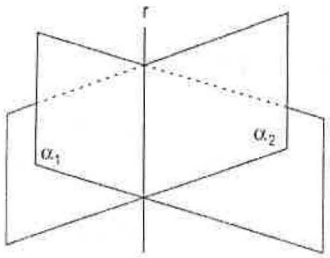
Pode não parecer trivial, mas trocar P_1 por P_2 no numerador da equação simétrica gera a mesma reta, ou seja, a reta $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ é idêntica à reta $\frac{x-x_2}{x_2-x_1} = \frac{y-y_2}{y_2-y_1} = \frac{z-z_2}{z_2-z_1}$. Para demonstrar que essas duas expressões são idênticas, bastar subtrair 1 em todos os três membros da primeira expressão:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - 1 = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} - 1 = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} - 1$$

$$\frac{x-x_1-x_2+x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1-y_2+y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1-z_2+z_1}{z_2-z_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-x_2}{x_2-x_1} = \frac{y-y_2}{y_2-y_1} = \frac{z-z_2}{z_2-z_1}$$

5.13.4. Equação Da Reta Interseção De Dois Planos



Como já foi citado, dois planos secantes determinam uma única reta. Para que dois planos sejam secantes basta que seus vetores normais não sejam paralelos. Na figura, a reta r é interseção dos planos α_1 e α_2

A equação de uma reta como interseção entre dois planos é um sistema formado pelas equações dos dois planos:

$$r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

Como foi dito anteriormente, não é possível expressar a equação de uma reta no espaço com uma única equação. Assim, por mais estranho que possa parecer, o sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ representa a equação de uma reta.

É possível obter a equação simétrica ou paramétrica da reta a partir da interseção de dois planos e vice versa. Por exemplo, considere a reta r com equação $r:\begin{cases} 2x-y+3z+5=0 \\ x+3y-2z-1=0 \end{cases}$. Basta obter dois pontos distintos que pertençam aos dois planos. Com manipulações algébricas simples se conclui que os pontos P(– 2, 1, 0) e Q(– 1, 0, – 1) pertencem aos dois planos. Deste modo, o vetor diretor da reta é dado por $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Assim, a equação simétrica é dada por:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}.$$

Da geometria espacial, sabe-se que por uma reta passam infinitos planos. Deste modo, há finitas maneiras de exprimir a equação de uma reta no espaço pela interseção de dois planos. Por exemplo, considere a reta r do exemplo acima, onde r $r:\begin{cases} 2x-y+3z+5=0 \\ x+3y-2z-1=0 \end{cases}$. É possível gerar outros planos que passam por r simplesmente fazendo combinações lineares com os planos dados:

$$A(2x - y + 3z + 5) + B(x + 3y - 2z - 1) = 0$$

Fazendo A = B = 1 obtém-se o plano $3x + 2y + z + 4 = 0$.

Fazendo A = 2 e B = – 3 obtém-se o plano $x - 11y + 12z + 13 = 0$.

Logo, outra forma de representar a reta $r:\begin{cases} 2x-y+3z+5=0 \\ x+3y-2z-1=0 \end{cases}$ é escrevendo da seguinte maneira $r:\begin{cases} 3x+2y+z+4=0 \\ x-11y+12z+13=0 \end{cases}$.

5.13.5. Equação Reduzida Da Reta

Já foi citado anteriormente que a equação simétrica da reta,

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

na verdade, são duas equações independentes, a saber:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c} \quad \text{e} \quad \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Desenvolvendo cada igualdade:

i) $\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c} \Rightarrow cx - cx_0 = az - az_0 \Rightarrow x = \frac{a}{c}z + x_0 - \frac{a}{c}z_0 \Rightarrow \mathbf{x = p_1z + q_1}$

ii) $\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \Rightarrow cy - cy_0 = bz - bz_0 \Rightarrow y = \frac{b}{c}z + y_0 - \frac{b}{c}z_0 \Rightarrow \mathbf{y = p_2z + q_2}$

As expressões destacadas são conhecidas como equações reduzidas da reta no espaço. O leitor deve ter percebido que as equações reduzidas são, na verdade, uma outra forma de expressar uma reta como interseção de dois planos. As expressões $x = p_1z + q_1$ e $y = p_2z + q_2$ são equações de planos, sendo o primeiro paralelo ao eixo y e o segundo é paralelo ao eixo x.

Por exemplo, suponha que um plano tenha como equação simétrica

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+2}{-1}.$$

Escrevendo x e y em função de z:

i) $\frac{x-1}{3}=\frac{z+2}{-1} \Rightarrow x - 1 = -3z - 6 \Rightarrow x = -3z - 5;$

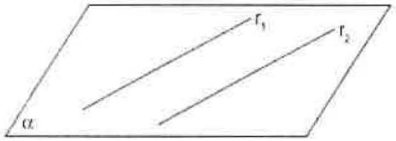
ii) $\frac{y-5}{4}=\frac{z+2}{-1} \Rightarrow y - 5 = -4z - 8 \Rightarrow y = -4z - 3.$

Perceba que $x = -3z - 5$ tem como vetor diretor $\vec{i} + 3\vec{k}$, ou seja, representa a equação de um plano paralelo ao eixo y, enquanto que $y = -4z - 3$ possui $\vec{j} + 4\vec{k}$ como vetor diretor, representando a equação de um plano paralelo ao eixo x. A interseção desses dois planos gera a reta r.

Em outras palavras, as equações reduzidas na reta são apenas uma outra forma de caracterizar uma reta pela interseção de dois planos.

5.14. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS NO ESPAÇO

5.14.1. Retas Paralelas



Considere duas retas no espaço dadas por suas equações simétricas:

$$r_1: \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$

$$r_2: \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

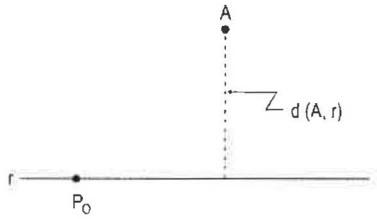
O vetor diretor da reta r_1 é $\vec{r}_1 = a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ e o vetor diretor da reta r_2 é $\vec{r}_2 = a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$. As retas r_1 e r_2 são paralelas se e somente se seus vetores diretores são paralelos:

$$\mathbf{r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{r}_1 // \vec{r}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}}$$

Por exemplo, as retas $r_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z}{18}$ e $r_2: \frac{x}{4}=\frac{y+9}{-8}=\frac{z+7}{24}$ são paralelas pois as razões entre as respectivas componentes dos vetores diretores são constantes: $\frac{3}{4}=\frac{-6}{-8}=\frac{18}{24}$.

Caso apareça uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, a mesma deve ser omitida nas razões entre as respectivas componentes dos vetores diretores. Assim, as retas $r_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{0}=\frac{z+4}{-5}$ e $r_2: \frac{x+7}{-8}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{20}$ são paralelas, uma vez que as razões entre as componentes dos vetores diretores não nulas são constantes: $\frac{2}{-8}=\frac{-5}{20}$

5.14.1.2. Distância Entre Ponto e Reta



Considere uma reta r no espaço, caracterizada por um ponto P_0 e um vetor diretor $\vec{r}$.

Designemos por d(A, r) a distância entre o ponto A e a reta r.

Sabe-se que a distância entre um ponto A e o ponto P_0 vale $|\overrightarrow{AP_0}| = |A - P_0|$.

Se θ é o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{AP_0}$ e $\vec{r}$:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{AP_0}\times\vec{r}|}{|\overrightarrow{AP_0}|.|\vec{r}|} = \frac{d(A,r)}{|\overrightarrow{AP_0}|} \Rightarrow \mathbf{d(A,r)} = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{AP_0}}\times\vec{\mathbf{r}}|}{|\vec{\mathbf{r}}|} = \left|\overrightarrow{\mathbf{AP_0}}\times\frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}\right|$$

Como aplicação, vamos calcular a distância entre o ponto A = (1, 1, 3) e a reta r com equação simétrica $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-2}$. Inicialmente, identificamos que o ponto $P_0 = (2, 2, 0)$ pertence à reta r, cujo vetor diretor é $\vec{r} = 2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Perceba que $\overrightarrow{AP_0} = P_0 - A = \vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$. Logo, o produto vetorial $\overrightarrow{AP_0}\times\vec{r}$ é dado por:

$$\overrightarrow{AP_0}\times\vec{r} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix} = (-2+3)\vec{i}+(-6+2)\vec{j}+(1-2)\vec{k} = \vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$$

Desta forma, a distância entre A e r vale:

$$d(A,r) = \frac{|\overrightarrow{AP_0}\times\vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}} = \sqrt{2}$$

De todas as formas de expressar a equação de uma reta, a que mais complica a aplicação da fórmula da distância entre um ponto e uma reta é quando a reta é definida pela interseção entre dois planos. Isso ocorre, pois é mais trabalhoso identificar um ponto da reta e seu vetor diretor. Vamos agora explicar como proceder nesse caso.

Suponha que se deseja calcular a distância entre o ponto A = (1, 2, 0) e a reta $r: \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+3y-z-2=0 \end{cases}$. Substituindo valores, encontra-se que os pontos $P_1 = (0, 1, 1)$ e $P_2 = (2, 0, 0)$ pertencem aos planos x + y + z − 2 = 0 e x + 3y − z − 2 = 0. Logo, o vetor diretor da reta r vale $\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = 2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

Note que $\overrightarrow{AP_1} = P_1 - A = -\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

Calculando o produto vetorial $\overrightarrow{AP_1}\times\vec{r}$:

$$\overrightarrow{AP_1} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1+1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (1+2)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

A distância entre A e r vale:

$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{AP_1} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Caso a reta seja dada na forma reduzida, o procedimento é semelhante ao caso da reta dada pela interseção de dois planos, ou seja, deve-se determinar dois pontos da reta. Por exemplo, suponha que se deseja calcular a distância entre o ponto A = (4, 3, – 1) e a reta r que é definida pelas relações x = – 3z + 5 e y = 2z + 4. Fazendo z = 0 obtém o ponto P_1 = (5, 4, 0) e fazendo z = 1 obtém-se P_2 = (2, 6, 1). Portanto, o vetor diretor da reta r vale $\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

O vetor $\overrightarrow{AP_1}$ é igual a $\overrightarrow{AP_1} = P_1 - A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

O produto vetorial $\overrightarrow{AP_1} \times \vec{r}$ vale:

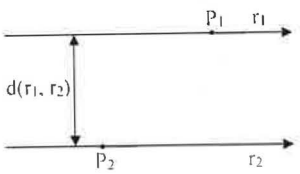
$$\overrightarrow{AP_1} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-2)\vec{i} + (-3-1)\vec{j} + (2+3)\vec{k} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

A distância entre A e r vale:

$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{AP_1} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 5^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}$$

Repare também que a fórmula da distância de um ponto a uma reta justifica encontrar distância nula quando o ponto A pertence à reta r. Se a reta r for caracterizada por um ponto P_0 e seu vetor diretor $\vec{r}$, caso o ponto A pertença à reta r, então o vetor $\overrightarrow{AP_0}$ será paralelo ao vetor $\vec{r}$, implicando que o produto vetorial $\overrightarrow{AP_1} \times \vec{r}$ será igual ao vetor nulo. Como $d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{AP_1} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$, se $A \in r$ encontra-se diretamente que d(A, r) = 0.

5.14.1.2. Distância Entre Retas Paralelas



A expressão da distância entre duas retas paralelas é bem simples de ser obtida. Suponha que a reta r_1 passa pelo ponto P_1 e tem $\vec{r}_1$ como vetor diretor e que a reta r_2 passa pelo ponto P_2 e tem $\vec{r}_2$ como vetor diretor. Desde que $r_1 \parallel r_2$, a distância entre r_1 e r_2 é constante e assim $d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2)$:

$$\mathbf{d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_2|}}$$

Alternativamente, também podemos calcular a distância entre P_2 e r_1:

$$d(r_1, r_2) = d(P_2, r_1) = \frac{|\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{r}_1|}{|\vec{r}_1|}$$

Por exemplo, adote que a reta r_1 passa pelo ponto P_1 = (9, – 3, 1) e tem vetor diretor $\vec{r}_1 = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 10\vec{k}$ e a reta r_2 passa pelo ponto P_2 = (5, 0, – 4) e tem vetor diretor $\vec{r}_2 = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Note que $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são vetores paralelos ($\vec{r}_1 = -2\vec{r}_2$), que é condição suficiente para que as retas r_1 e r_2 sejam paralelas.

Observe que: $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$

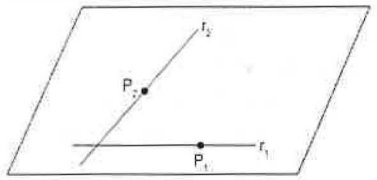
O valor de $\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{r}_1$ é igual a:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & -10 \end{vmatrix} = (-30+20)\vec{i} + (10-40)\vec{j} + (-16+6)\vec{k} = -10\vec{i} - 30\vec{j} - 10\vec{k}$$

Logo:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{r}_1|}{|\vec{r}_1|} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + (-30)^2 + (-10)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-10)^2}} = \frac{\sqrt{1100}}{\sqrt{120}} = \frac{\sqrt{330}}{6}$$

5.14.2. Retas Concorrentes



Por definição, duas retas são concorrentes quando se intersectam em exatamente um ponto. No espaço, duas retas r_1 e r_2 são concorrentes se existe um plano que as contém e r_1 e r_2 não são paralelas.

5.14.2.1. Condição Para Duas Retas Serem Concorrentes

Suponha que a reta r_1 passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e tem vetor diretor $\vec{r}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e a reta r_2 passa pelo ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e tem vetor diretor $\vec{r}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$. Sabe-se que as retas r_1 e r_2 são concorrentes se foram coplanares e se $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ não forem paralelos. Assim, devem ocorrer as duas condições:

i) $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ não são paralelos $\Rightarrow$ $\vec{r}_1 \neq k\vec{r}_2$ para todo k real;

ii) $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são coplanares, implicando que seu produto misto é nulo:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Por exemplo, vamos aplicar as duas condições pra verificar se as retas r_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1}$ e r_2: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ são concorrentes. Inicialmente, é possível identificar que $P_1 = (1, 1, -2)$, $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + \vec{k}$, $P_2 = (0, -1, -1)$ e $\vec{r}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

i) Não existe proporcionalidade entre as componentes de $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, ou seja, r_1 e r_2 não são paralelos;

ii) $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, pois a 1ª e a 3ª colunas são proporcionais.

Como as duas condições são satisfeitas (r_1 e r_2 são coplanares não paralelas), então as retas r_1 e r_2 são concorrentes.

5.14.2.2. Interseção Entre Retas Concorrentes

Se as retas r_1 e r_2 são concorrentes, é possível encontrar o ponto de interseção entre essas retas. Como cada reta é definida por duas relações entre as coordenadas x, y e z, o ponto de interseção de r_1 e r_2 é a solução do sistema formado pelas quatro equações que relacionam x, y e z nas duas retas.

Entretanto, é sempre importante verificar, com antecedência, se as setas são concorrentes, de acordo com os critérios elencados no item anterior.

Por exemplo, vamos encontrar a interseção entre as retas $r_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}$ e $r_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$. Inicialmente, vamos verificar se as retas são concorrentes. Da reta r_1 tem-se $P_1 = (0, 2, -1)$ e $\vec{r}_1 = \vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$. Da reta r_2 tem-se $P_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{r}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

i) Como os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ não são paralelos, então as retas r_1 e r_2 não são paralelas;

ii) $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$, que implica que os vetores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são coplanares.

Das condições acima, segue que as retas r_1 e r_2 são concorrentes.

Para encontrar o ponto de interseção é necessário resolver o sistema formado pelas quatro equações que definem as retas:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} \\ \frac{x}{1} = \frac{z+1}{3} \\ \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{x}{-1} = \frac{z}{-2} \end{cases}$$

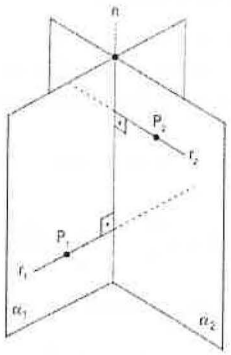
Das equações (1) e (3): $-3x = y - 2$ e $2x = -y + 1$

Somando essas equações: $x = 1 \Rightarrow y = -1$

Da equação (2): $3x = z + 1 \Rightarrow z = 2$

Logo, o ponto de interseção das retas r_1 e r_2 é $P = (1, -1, 2)$

5.14.3. Retas Reversas



Por definição, duas retas são reversas quando não existe plano que as contenha.

Na figura ao lado o plano α_1 contém a reta r_1 e o plano α_2 contém a reta r_2, porém não existe um mesmo plano que contenha, simultaneamente, as retas r_1 e r_2.

A reta n indicada na figura é a única reta no espaço que é perpendicular a r_1 e r_2. A construção da reta n é simples, sendo resultado da interseção de dois planos, cada um contendo uma das retas e perpendicular a outra.

5.14.3.1. Condição Para Duas Retas Serem Reversas

Suponha que a reta r_1 passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e tem vetor diretor $\vec{r}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e a reta r_2 passa pelo ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e tem vetor diretor $\vec{r}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$. De acordo com a definição de retas reversas, a condição para que r_1 e r_2 sejam reversas é que os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ não sejam coplanares. Para que isso ocorra, basta que seu produto misto seja diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vamos fazer uma aplicação numérica, pra justificar que as retas r_1 e r_2, definidas como $r_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ e $r_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. De r_1 conclui-se que $P_1 = (0, 1, 1)$ e $\vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{k}$. De r_2 tira-se que $P_2 = (1, 2, 1)$ e $\vec{r}_2 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

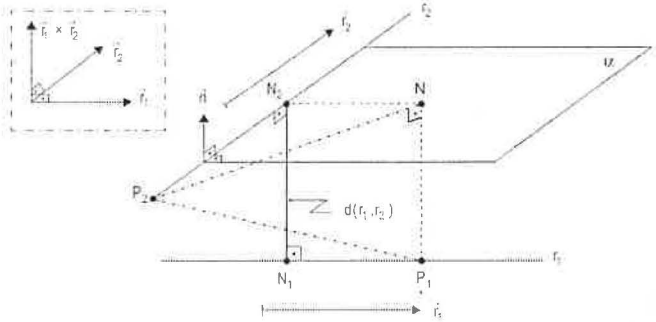
Portanto:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 = -2 \neq 0$$

Como esse determinante deu como resultado um número distinto de zero, as retas r_1 e r_2 são reversas.

5.14.3.2. Distância Entre Retas Reversas

Suponha que a reta r_1 passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e tem vetor diretor $\vec{r}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e a reta r_2 passa pelo ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e tem vetor diretor $\vec{r}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$. Na figura abaixo, α é o plano que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1. Perceba que a distância entre r_1 e r_2 é igual à distância entre P_1 e o plano α. Se N é a projeção de P_1 sobre o plano α, então $d(r_1, r_2) = d(P_1, \alpha) = |\overrightarrow{NP_1}|$.



Se $\vec{n}$ é o vetor normal do plano α, é possível identificar que $\vec{n}$, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são dois a dois vetores perpendiculares, de onde se conclui que $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. Além disso, o vetor $\overrightarrow{NP_1}$ é paralelo ao vetor $\vec{n}$. Se θ é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{NP_1}$:

$$|\cos\theta| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|.|\vec{n}|} = \frac{|\overrightarrow{NP_1}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}.\vec{n}|}{|\vec{n}|} \Rightarrow \mathbf{d(r_1, r_2) = \frac{|(P_2 - P_1).(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}}$$

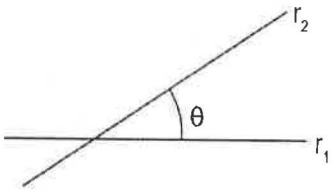
Note que o denominador de $d(r_1, r_2)$ é o produto misto entre os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, sendo seu módulo numericamente igual ao volume de um paralelepípedo formado por $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$.

Vamos aplicar essa fórmula nas retas do item anterior, onde já foi demonstrado que as retas são reversas: $r_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ e $r_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tem-se que $P_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{k}$, $P_2 = (1, 2, 1)$ e $\vec{r}_2 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0-1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|(P_2 - P_1).(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \frac{|(\vec{i} + \vec{j}).(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})|}{|-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}|} = \frac{|-1-1+0|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5.15. ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS



O ângulo formado por duas retas é o menor ângulo formado pelos vetores diretores das duas retas. Portanto, se $\vec{r}_1$ é o vetor diretor da reta r_1 e $\vec{r}_2$ é o vetor diretor da reta r_2, o ângulo θ entre as retas r_1 e r_2 é tal que:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r}_1 . \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| . |\vec{r}_2|}$$

Por exemplo, se uma reta r_1 tem vetor diretor $\vec{r}_1 = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ e uma reta r_2 tem vetor diretor $\vec{r}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, então o ângulo θ entre as retas r_1 e r_2 é tal que:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r}_1 . \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| . |\vec{r}_2|} = \frac{|(4\vec{j} - 3\vec{k}).(-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})|}{|4\vec{j} - 3\vec{k}| . |-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}|} = \frac{|8 - 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{5}{5.3} = \frac{1}{3}$$

Assim, o ângulo formado por r_1 e r_2 vale arc cos 1/3

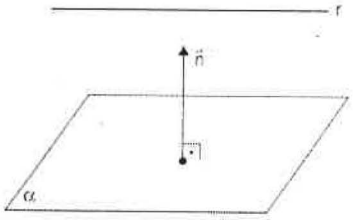
Observação: Não é necessário que as retas sejam concorrentes para que seja calculado o ângulo que elas formam.

5.16. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Há duas posições relativas entre uma reta e um plano, a saber:

(1) a reta é paralela ao plano

(2) a reta é secante ao plano



Uma reta r é paralela a um plano α se seu vetor diretor $\vec{r}$ é perpendicular ao vetor normal $\vec{n}$ do plano, ou seja, se $\vec{r}.\vec{n} = 0$.

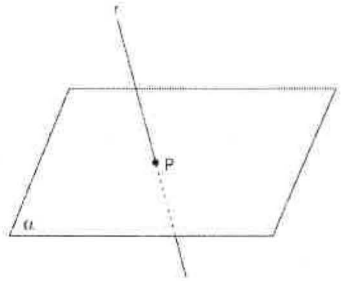
Do ponto de vista das componentes, se $\vec{r} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{n} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ então a reta r é paralela ao plano α se e somente se

$$\mathbf{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.}$$

Por exemplo, é possível afirmar que a reta $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$ é paralela ao plano $x + 2y + z = 0$, desde que o vetor diretor da reta é $\vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, o vetor normal ao plano é $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e ocorre que:

$$\vec{r}.\vec{n} = (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 1 - 4 + 3 = 0$$

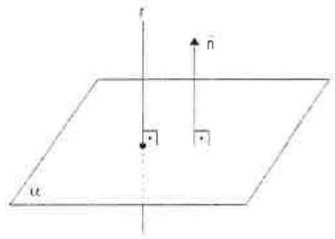
É importante ressaltar que uma reta contida num plano é paralela a esse plano.



Uma reta é secante a um plano se a interseção da reta com o plano for um único ponto. A condição para que isso ocorra é que a reta não seja paralela ao plano. Assim, se $\vec{r}$ é o vetor diretor da reta r e $\vec{n}$ é o vetor normal do plano α, r será secante a α se e somente se $\vec{r}.\vec{n} \neq 0$.

Do ponto de vista das componentes, se $\vec{r} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{n} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ então a reta r é secante ao plano α se e somente se

$$\mathbf{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \neq 0.}$$



Um caso particular de reta secante a um plano ocorre quando a reta r é perpendicular ao plano α. A condição para que isso ocorra é que o vetor diretor $\vec{r}$ da reta r seja paralelo ao vetor normal $\vec{n}$ do plano α. Se $\vec{r} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{n} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ então a reta r é secante ao plano α se e somente se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

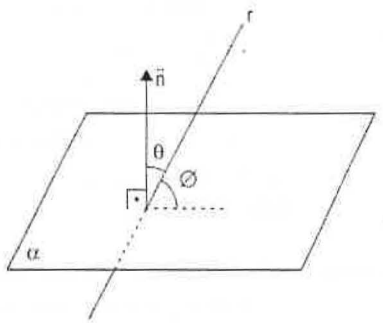
Por exemplo, é possível afirmar que a reta r dada por $\frac{x-3}{36} = \frac{y+7}{72} = \frac{z+5}{-42}$ é perpendicular ao plano α: $6x + 12y - 7z = 0$. Isso ocorre, pois, o vetor diretor da reta r é $\vec{r} = 36\vec{i} + 72\vec{j} - 42\vec{k}$, o vetor normal ao plano α é $\vec{n} = 6\vec{i} + 12\vec{j} - 7\vec{k}$ e a razão entre as respectivas componentes é constante:

$$\frac{36}{6} = \frac{72}{12} = \frac{-42}{-7}$$

Observação: Pode ocorrer uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ na verificação da perpendicularidade de uma reta e um plano. Nesse caso, é permitido omitir essa razão no cálculo das razões das respectivas componentes. Por exemplo, é possível afirmar que a reta r: $\frac{x+4}{-3} = \frac{y+9}{9} = \frac{z-1}{0}$ é perpendicular ao plano α: $x - 3y + 4 = 0$, desde que $\frac{-3}{1} = \frac{9}{-3}$.

5.17. ÂNGULO ENTRE UMA RETA E UM PLANO

Inicialmente, vamos considerar o caso particular da reta r ser paralela ao plano α. Nesse caso, define-se o ângulo entre r e α como sendo igual a zero.



Caso a reta r seja secante ao plano α é possível calcular o ângulo formado por r e α analisando o ângulo formado pelo vetor diretor $\vec{r}$ de r e pelo vetor normal $\vec{n}$ ao plano α.

Se θ é o ângulo formado por $\vec{r}$ e $\vec{n}$ então o ângulo formado pela reta r e o plano α é:

$$\varnothing = 90^\circ - \theta$$

Deste modo:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r}.\vec{n}|}{|\vec{r}|.|\vec{n}|} \Rightarrow \operatorname{sen}\varnothing = \frac{|\vec{r}.\vec{n}|}{|\vec{r}|.|\vec{n}|}$$

Por exemplo, se a reta é dada por $r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-2}{2}$ e o plano α tenha equação $x + 8y - 4z + 2 = 0$ então $\vec{r} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{n} = \vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$. Deste modo, o ângulo $\varnothing$ entre r e α é tal que:

$$\operatorname{sen}\varnothing = \frac{|\vec{r}.\vec{n}|}{|\vec{r}|.|\vec{n}|} = \frac{|(-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).(\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k})|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 8^2 + (-4)^2}} = \frac{|-2-8-8|}{3.9} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\varnothing = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}$$

Exercícios Resolvidos

01) Determine a equação geral do plano que contém o ponto P(1, 3, 4) e a reta r: $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - 7t \end{cases}$.

Solução:

A reta dada é paralela ao vetor $\vec{v} = (5, -3, 7)$ e passa pelo ponto Q(1, 2, 2). Desta maneira, o plano é paralelo aos vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{QP} = (0, 1, 2)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-4 \\ 5 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x + 6 + 5z - 20 - 7x + 7 - 10y + 30 = 0 \Rightarrow$$

$$13x + 10y - 5z - 23 = 0$$

02) Calcular a distância do ponto A = (1, 2, 0) à reta r: $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

Solução:

É necessário encontrar o vetor diretor da reta r: $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

Subtraindo as duas equações: $y = z \Rightarrow x = 2 - 2y$

Assim, os pontos P = (2, 0, 0) e Q = (0, 1, 1) pertencem à reta r.

Logo, o vetor diretor da reta r é $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 1, 1) \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{6}$

Note que: $\overrightarrow{AP} = P - A = (1, -2, 0)$

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{AP} \times \vec{r}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

03) Obtenha a equação simétrica da reta que passa pelo ponto de interseção da reta t: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = x - 3 \end{cases}$ com o plano π: $2x + 2y - 3z + 4 = 0$ e que é simultaneamente ortogonal às retas $r: \begin{cases} x = -z + 4 \\ y = 3z - 6 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 4 \\ z = 2y + 1 \end{cases}$.

Solução:

Interseção P entre t e π: $2x + 2(2x + 1) - 3(x - 3) + 4 = 0 \Rightarrow$

$2x + 4x + 2 - 3x + 9 + 4 = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow P = (-5, -9, -8)$

Pra determinar o vetor diretor da reta r basta escolher dois pontos da reta. Note que $R_1 = (4, -6, 0)$ e $R_2 = (3, -3, 1)$ pertencem a r.

Logo: $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = (-1, 3, 1)$

$S_1 = (4, 0, 1)$ e $S_2 = (4, 1, 3)$ pertencem a s e então $\vec{s} = \vec{S}_2 - \vec{S}_1 = (0, 1, 2)$

Como o vetor diretor $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{r}$ e $\vec{s}$:

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

Logo, a equação simétrica da reta é $\frac{x+5}{5} = \frac{y+9}{2} = \frac{z+8}{-1}$

04) (EN-98) A equação do plano que contém as retas de equação $\frac{x-4}{3} = y-3 = \frac{z-5}{4}$ e $\frac{x-6}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{2}$ é igual a:

a) $4x + 3y + 5z = 13$ b) $6x + 4y + 3z = 12$ c) $6x - 14y - z = 0$
d) $6x - 14y - z = -23$ e) $4x + 3y + 5z = 12$

Solução: Alternativa D

Segundo as equações das retas, os pontos A = (4, 3, 5) e B = (6, 4, 3) pertencem ao plano e os vetores $\vec{r}_1 = (3, 1, 4)$ e $\vec{r}_2 = (5, 2, 2)$ são paralelos ao plano.

Se P = (x, y, z) é um ponto genérico do plano, então $\overrightarrow{AP} = (x-4, y-3, z-5)$ também é um vetor paralelo ao plano.

$$\overrightarrow{AP}.(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$2x - 8 + 20y - 60 + 6z - 30 - 8x + 32 - 6y + 18 - 5z + 25 = 0 \Rightarrow$
$-6x + 14y + z - 23 = 0 \Rightarrow 6x - 14y - z = -23$

05) (IME-60) Duas retas L_1 e L_2 são determinadas pelos pontos:

$$L_1 \begin{cases} P_1(0,0,-4) \\ P_2(1,0,-2) \end{cases} \text{ e } L_2 \begin{cases} P_3(0,-1,2) \\ P_4(1,1,8) \end{cases}$$

Pedem-se:
a) O vetor unitário normal às duas retas.
b) A distância entre as retas.

Solução:

a) Vetor diretor da reta L_1: $\vec{L}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1, 0, 2)$

Vetor diretor da reta L_2: $\vec{L}_2 = \overrightarrow{P_3P_4} = P_4 - P_3 = (1, 2, 6)$

A reta que é normal a L_1 e L_2 tem vetor normal $\vec{n} = \vec{L}_1 \times \vec{L}_2$:

$$\vec{n} = \vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

Logo: $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{-4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

b) Como as retas são reversas: $d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_4}.(\vec{L}_1 \times \vec{L}_2)|}{|\vec{L}_1 \times \vec{L}_2|}$

$\overrightarrow{P_1P_4} = P_4 - P_1 = (1, 1, 12)$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_4}.(\vec{L}_1 \times \vec{L}_2)|}{|\vec{L}_1 \times \vec{L}_2|} = \frac{|(1, 1, 12).(-4, -4, 2)|}{6} = \frac{-4-4+24}{6} = \frac{8}{3}$$

06) (EN-22) Assinale a opção que apresenta a soma de todas as coordenadas dos pontos da reta r: $x - 1 = 2y = z$ que equidistam dos planos π_1: $2x - 3y - 4z - 3 = 0$ e π_2: $4x - 3y - 2z = -3$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução: Alternativa C

Um ponto aleatório da reta r tem a forma P = (2k + 1, k, 2k)

Igualando as distâncias de P a π_1 e a π_2:

$$\frac{|2.(2k+1) - 3k - 4.2k - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|4.(2k+1) - 3k - 2.2k + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} \Rightarrow$$

$|4k + 2 - 3k - 8k - 3| = |8k + 4 - 3k - 4k + 3| \Rightarrow |-7k - 1| = |k + 7|$

i) $-7k - 1 = k + 7 \Rightarrow 8k = -8 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow P_1 = (-1, -1, -2)$

ii) $7k + 1 = k + 7 \Rightarrow 6k = 6 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow P_2 = (3, 1, 2)$

A soma das coordenadas vale $-4 + 6 = 2$

07) (EN-89) As equações da reta que passa pelo ponto P(3, – 2, – 4), é paralela ao plano $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ e intercepta a reta $\frac{x-2}{3} = \frac{-4-y}{2} = \frac{z-1}{2}$ são:

a) $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$ b) $\frac{x-3}{-43} = \frac{y+2}{30} = \frac{z+4}{-23}$

c) $\frac{x-5}{3} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-9}{4}$ d) $\frac{x+43}{3} = \frac{y-30}{-2} = \frac{z+23}{-4}$

e) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$

Solução:

O vetor normal do plano $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ é $\vec{n} = (3, -2, -3)$, que é ortogonal à reta procurada. A reta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$ passa pelo ponto Q(2, – 4, 1) e tem vetor diretor $\vec{v} = (3, -2, 2)$. A reta procurada tem equação simétrica $\frac{x-3}{a} = \frac{y+2}{b} = \frac{z+4}{c}$, onde $\vec{u} = (a, b, c)$ é o vetor diretor da reta.

$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (3, -2, -3).(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 3c = 0$ (1)

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, -2, 5)$ são coplanares:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10a - 2b - 6c - 2c + 4a - 15b = 0 \Leftrightarrow 6a + 17b + 8c = 0 \quad (2)$$

Multiplicando (1) por -2: $-6a + 4b + 6c = 0$ (3)

(2) + (3): $21b + 14c = 0 \Rightarrow 3b = -2c$ (4)

Substituindo em (4) em (3): $-6a + 4b - 9b = 0 \Rightarrow 6a = -5b$ (5)

$$(a, b, c) = \left(-\frac{5b}{6}, b, -\frac{3b}{2}\right) = \frac{-b}{6}(5, -6, 9) \Rightarrow$$

$(5, -6, 9)$ é o vetor diretor da reta procurada

Deste modo, a equação da reta é $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$

08) Determinar o ângulo entre as retas $r: \frac{x-1}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}$ e $s: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

Solução:

O vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (7, -1, 0)$ e o vetor diretor da reta s é $\vec{s} = (-2, 1, -2)$.

Logo, o ângulo entre as retas vale:

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}.\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|} = \frac{(7, -1, 0).(-2, 1, -2)}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 0^2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{-14 - 1}{\sqrt{50}\sqrt{9}} = -\frac{15}{15\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

O ângulo formado pelos vetores diretores é $\frac{3\pi}{4}$, porém, por definição, o ângulo formado pelas retas é sempre o menor possível e, portanto, vale $\frac{\pi}{4}$.

09) Considere as retas paralelas r: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ e s: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$. Determinar a distância entre r e s.

Solução:

A reta r passa pelo ponto $P = (0, 0, 2)$ e tem vetor diretor $\vec{r} = (1, 1, 2)$ e a reta s passa pelo ponto $Q = (-1, 1, 0)$ e tem vetor diretor $\vec{s} = (2, 2, 4)$.

Note que $\overrightarrow{QP} = P - Q = (1, -1, 2)$ e $\overrightarrow{QP} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 4\vec{k}$

A distância entre r e s é igual à distância entre P e a reta s:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{64 + 16}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

10) (EN-09) Considere o ponto $P = (1, 3, -1)$, o plano $\pi: x + z = 2$ e a reta $s: \begin{cases} x - z = y + 2 \\ z - x = y - 2 \end{cases}$. As equações paramétricas de uma reta r, que passa por P, paralela ao plano π e distando 3 unidades de distância da reta s são

a) $x = t$; $y = 3$; $z = -t + 1$
b) $x = -t + 1$; $y = 3$; $z = -t - 1$
c) $x = 1$; $y = t + 3$; $z = -t - 1$
d) $x = 1$; $y = -t + 3$; $z = t + 1$
e) $x = t + 1$; $y = 3$; $z = -t - 1$

Solução: Alternativa E

O vetor normal do plano π é $\vec{\pi} = (1, 0, 1)$

Se $\vec{r} = (a, b, c)$ é o vetor diretor da reta r e como $r \parallel \pi$, então $\vec{r} \perp \vec{\pi}$:

$\vec{r}.\vec{\pi} = (a, b, c).(1, 0, 1) = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow \vec{r} = (a, b, -a)$

Somando as duas equações que definem a reta s obtém-se $y = 0$.

Logo, tem-se a igualdade $x - z = 2 \Rightarrow x = z + 2 \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow$

$Q = (0, 0, -2) \in s$ e $\vec{s} = (1, 0, 1)$

Perceba que: $\overrightarrow{QP} = P - Q = (1, 3, -3)$

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & -a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b\vec{i} - 2a\vec{j} - b\vec{k}$$

Como as retas r e s são reversas, sua distância vale $d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{QP}.(\vec{r} \times \vec{s})|}{|\vec{r} \times \vec{s}|}$:

$$3 = \frac{|(1, 3, -3).(b, -2a, -b)|}{\sqrt{b^2 + (-2a)^2 + (-b)^2}} = \frac{|b - 6a + 3b|}{\sqrt{b^2 + 4a^2 + b^2}} = \frac{|-6a + 4b|}{\sqrt{4a^2 + 2b^2}} \Rightarrow$$

$36a^2 + 18b^2 = 36a^2 - 48ab + 16b^2 \Rightarrow 2b^2 = -48ab \Rightarrow b = 0$ ou $b = -24a$

i) se $b = 0 \Rightarrow \vec{r} = (a, 0, -a) = a(1, 0, -1) \Rightarrow \vec{r} = (1, 0, -1)$

ii) se $b = -24a \Rightarrow \vec{r} = (a, -24a, -a) = a(1, -24, -1) \Rightarrow \vec{r} = (1, -24, -1)$

Nas alternativas há apenas a reta indicada no primeiro caso ($b = 0$):

$x = t + 1$; $y = 3$; $z = -t - 1$

5.18. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Uma equação geral do 2° grau com tresvariáveis é uma expressão do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1)$$

com pelos menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F diferente de zero.

No espaço, uma superfície cuja equação seja do tipo (1) é chamada de superfície quádrica. A interseção de uma superfície quádrica com os planos paralelos aos planos coordenados é uma cônica, salvo em casos particulares, que podem gerar retas, um ponto ou mesmo o conjunto vazio, que podem ser encarados como cônicas degeneradas.

Se a superfície quádrica tiver equação do tipo $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$, então é chamada de quádrica cêntrica, por estar centrada na origem dos eixos tridimensionais. Por outro lado, se a equação da quádrica for de um dos tipos $Ax^2 + By^2 = Cz$ ou $Ax^2 + Bz^2 = Cy$ ou $Ay^2 + Bz^2 = Cx$ então é uma quádrica não cêntrica, uma vez que o centro não está na origem do sistema de eixos.

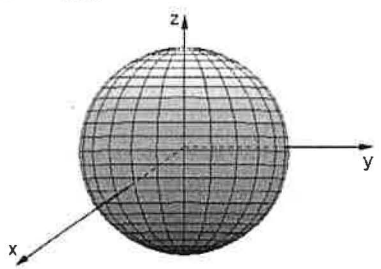
5.18.1. Esfera

A esfera ou superfície esférica é uma superfície dada pela equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

onde $C(x_0, y_0, z_0)$ é o centro da esfera.

A interseção de uma esfera com um plano pode ser um ponto, em caso de tangência, ou uma circunferência.



Pra determinar centro e raio da esfera basta desenvolver a expressão:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$$

Logo, se a equação dada da esfera é da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

então segue que $x_0 = \frac{a}{-2}$, $y_0 = \frac{b}{-2}$, $z_0 = \frac{c}{-2}$ e $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d}$

5.18.2. Elipsóide

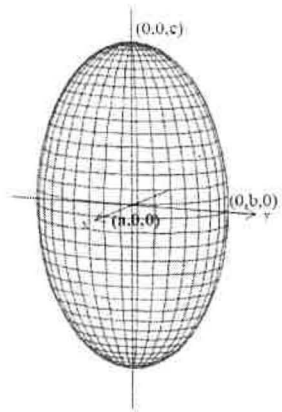
Elipsóide é uma quádrica com equação do tipo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

onde (x_0, y_0, z_0) é o centro da elipsóide.

O elipsóide é uma superfície simétrica em relação aos eixos coordenados, aos planos coordenados e a origem. Se dois dos coeficientes a, b e c foram idênticos, o elipsóide é de revolução, ou seja, pode ser obtido pela rotação de uma elipse em torno de um dos eixos coordenados.

O esboço de um elipsóide está indicado na figura abaixo:



5.18.3. Hiperbolóide De Uma Folha

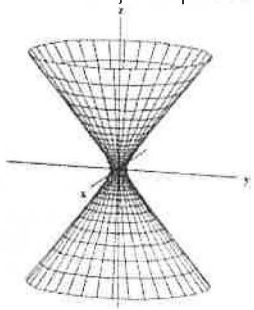
Hiperbolóide de uma folha é uma superfície cuja equação é de um dos tipos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \text{ ou } \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \text{ ou}$$
$$-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

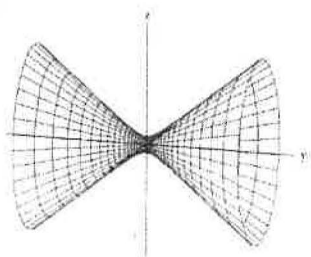
onde $C(x_0, y_0, z_0)$ é o centro do hiperbolóide de uma folha.

Se centrada na origem, é uma superfície simétrica aos eixos coordenados e planos coordenados. Tomando como equação $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$, a interseção com um plano paralelo ao plano Oxy é uma elipse, a interseção com o plano Oxz é uma hipérbole e a interseção com o plano Oyz é uma hipérbole.

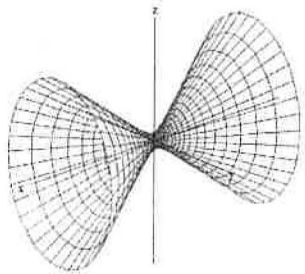
Esboço do parabolóide de uma folha:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

5.18.4. Hiperbolóide De Duas Folhas

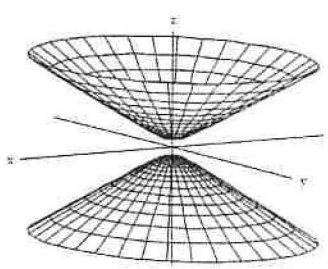
Hiperbolóide de duas folhas é uma superfície cuja equação é de um dos tipos:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \text{ ou } -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \text{ ou}$$

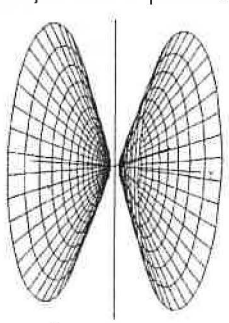
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,$$

onde $C(x_0, y_0, z_0)$ é o centro do hiperbolóide de duas folhas.

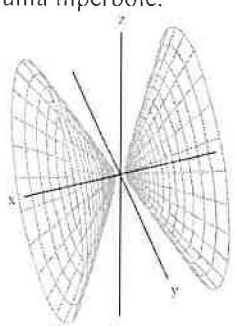
Se centrada na origem, é uma superfície simétrica aos eixos coordenados e planos coordenados. Tomando como equação $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$, a interseção com um plano paralelo ao plano Oxy é uma elipse, a interseção com o plano Oxz é uma hipérbole e a interseção com o plano Oyz é uma hipérbole.



$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

5.18.5. Parabolóide Elíptico

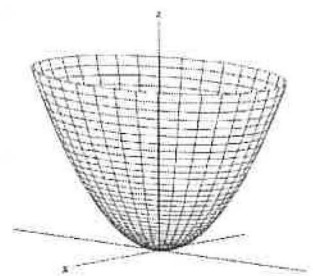
Parabolóide Elíptico é uma superfície cuja equação é de um dos tipos:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=c(z-z_0) \text{ ou } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{b^2}=c(y-y_0) \text{ ou}$$

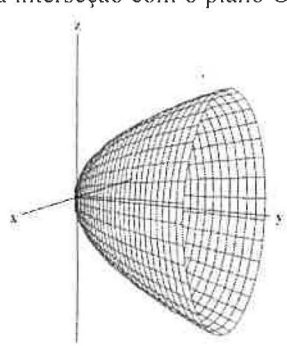
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=c(x-x_0),$$

onde $C(x_0, y_0, z_0)$ é o vértice do parabolóide elíptico.

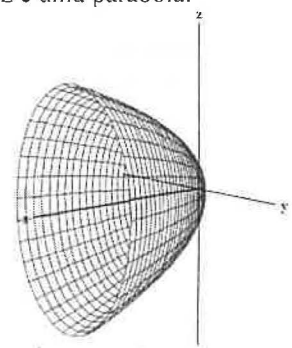
Se centrada na origem, é uma superfície simétrica aos eixos coordenados e planos coordenados. Tomando como equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=c(z-z_0)$, a interseção com um plano paralelo ao plano Oxy é uma elipse, a interseção com o plano Oxz é uma parábola e a interseção com o plano Oyz é uma parábola.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy$$



$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=cx$$

5.18.6. Parabolóide Hiperbólico

Parabolóide Hiperbólico é uma superfície cuja equação é de um dos tipos:

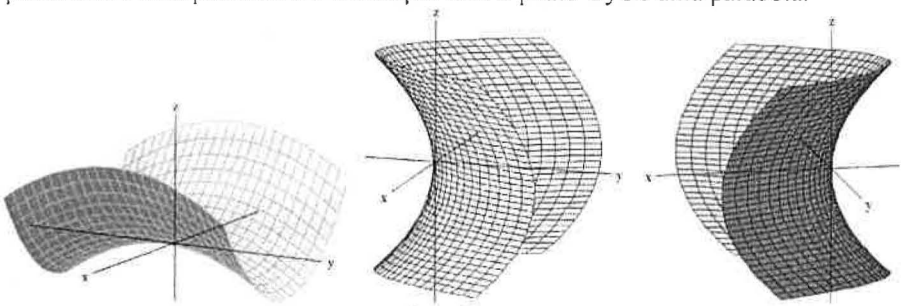
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=c(z-z_0) \text{ ou } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(z-z_0)^2}{b^2}=c(y-y_0) \text{ ou}$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=c(x-x_0),$$

onde $C(x_0, y_0, z_0)$ é o vértice do parabolóide hiperbólico.

Se centrada na origem, é uma superfície simétrica aos eixos coordenados e planos coordenados. Tomando como equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=c(z-z_0)$, a

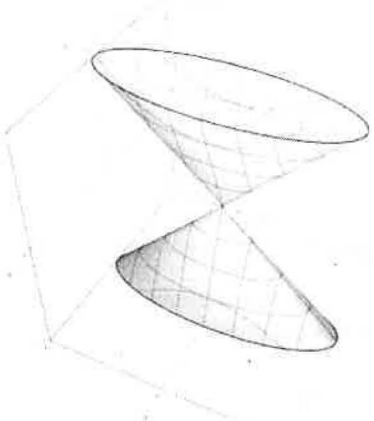
interseção com um plano paralelo ao plano Oxy é uma hipérbole, a interseção com o plano Oxz é uma parábola e a interseção com o plano Oyz é uma parábola.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ $\quad$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy$ $\quad$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = cx$

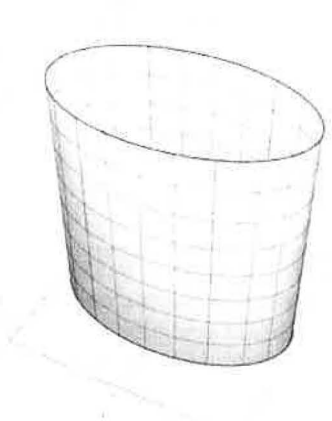
5.18.6. Outras Quádricas

Cone Elíptico



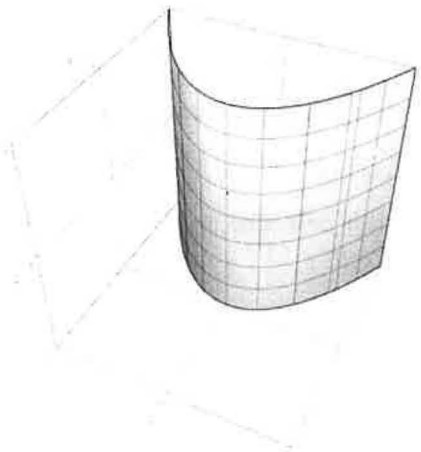
Equação: $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Cilindro Elíptico



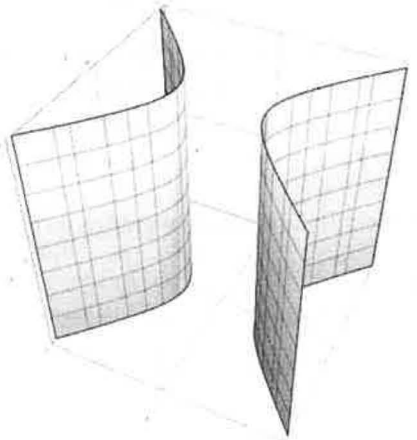
Equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Cilindro Parabólico



Equação: $x^2 + 2ay = 0$

Cilindro Hiperbólico



Equação: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Exercícios Resolvidos

01) Determine o centro e o raio da esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 10z - 39 = 0.$$

Solução:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 10z + 21 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 10x + 25 = 9 \Rightarrow$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 3^2 \Rightarrow$ centro em $(1, -2, 5)$ e raio 3

02) Determine as interseções do paraboloide de uma folha $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$ com os planos coordenados.

Solução:

Interseção com o plano Oxy: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow$ elipse

Interseção com o plano Oxz: $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1 \Rightarrow$ hipérbole

Interseção com o plano Oyz: $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1 \Rightarrow$ hipérbole

03) Determine a equação do plano tangente à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto P = (1, 2, 2).

Solução:

Note que a esfera está centrada na origem O = (0, 0, 0) e possui raio 3.

O vetor normal ao plano tangente é $\overrightarrow{OP} = P - O = (1, 2, 2)$.

Assim, a equação do plano α tangente é da forma $x + 2y + 2z + k = 0$.

Como $P \in \alpha$: $1 + 2.2 + 2.2 + k = 0 \Rightarrow k = -9 \Rightarrow \alpha: x + 2y + 2z - 9 = 0$

04) Identifique a esboce o gráfico da quádrica dada pela equação

$$4x^2 - 16x + 2y^2 - 16y + z^2 - 6z + 53 = 0.$$

Solução:

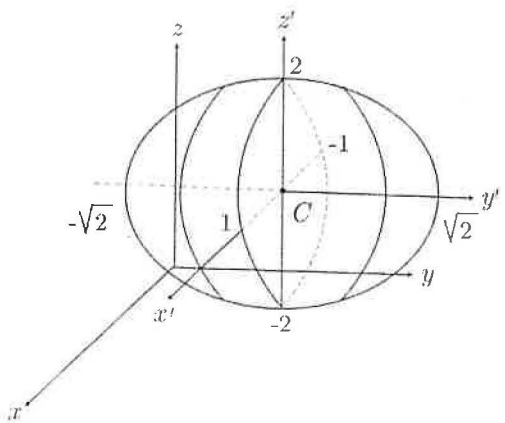
Organizando as parcelas em quadrados perfeitos:

$4x^2 - 16x + 16 + 2y^2 - 16y + 32 + z^2 - 6z + 9 = 4 \Rightarrow$

$4(x-2)^2 + 2(y-4)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 + \frac{(y-4)^2}{2} + \frac{(z-3)^2}{4} = 1 \Rightarrow$

elipsóide de semieixos 1, $\sqrt{2}$ e 2 e centro C(2, 4, 3).

Esboço do gráfico do elipsóide:



Exercícios Propostos

01) (EN-99) A equação do plano que passa pelos pontos (1, 0, 1) e (0, 1, – 1) e é paralelo ao segmento que une os pontos (1, 2, 1) e (0, 1, 0) é:

a) $3x - y - 2z - 1 = 0$ b) $x - 3y + 2z + 1 = 0$

c) $3x - y + 2z - 1 = 0$ d) $-5x + y + 2z + 3 = 0$

e) $2x - 3y + z - 1 = 0$

02) Os planos $\alpha_1: x + y + z - 4 = 0$ e $\alpha_2: 2x + 2y + 2z - 3 = 0$ são paralelos. Determinar a distância entre eles.

03) (EFOMM-17) O volume da pirâmide delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $\pi: 5x - 2y + 4z = 20$ é:

a) 20/3 u.v. b) 50/3 u.v. c) 100/3 u.v.

d) 100 u.v. e) 200 u.v.

04) (EFOMM-20) Sejam o plano: $6x - 4y - 4z + 9 = 0$, os pontos A = (– 1, 3, 2) e B = (m, n, p). Sabendo-se que o ponto B é simétrico ao ponto A, em relação ao plano α, o valor da soma m + n + p é

a) – 2 b) 0 c) 1/4 d) 7/4 e) 3

05) Achar o ponto do eixo das cotas equidistantes do ponto A = (1, – 2, 0) e do plano $2x + 3y + 6z - 9 = 0$.

06) O plano $\pi: x + y - z - 2 = 0$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Determine a área e a altura do triângulo ABC.

07) Obter as equações dos planos paralelos ao plano $2x + y - 2z + 1 = 0$ e que distam 3 unidades da origem.

08) (EN-16) Um plano π_1 contém os pontos M(– 1, 3, 2) e N(– 2, 0, 1). Se π_1 é perpendicular ao plano $\pi_2: 3x - 2y + z - 15 = 0$, é possível dizer que o ângulo entre π_1 e o plano $\pi_3: x - y + z - 7 = 0$ vale

a) $\arccos\left(\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$ b) $\operatorname{arccot}\left(\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$ c) $\arccos\left(-\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$

d) $\arccos\left(\frac{61}{45\sqrt{2}}\right)$ e) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{194}}{16}\right)$

09) Achar o ponto P' simétrico de P = (2, 2, – 1) em relação ao plano α: x – z + 3 = 0.

10) (EN-07) Um plano π, ao interceptar os semi-eixos coordenados positivos, determina sobre estes, segmentos iguais. Sabendo que os pontos P (1, – 1, 2) e Q(2, 2, 1) pertencem a um plano α perpendicular ao plano π, pode-se afirmar que a equação do plano α é igual a.

a) x –y +2z +2=0 b) x + y +z +2= 0
c) 2x-y + z -1= 0 d) -2x + y + z +1= 0
e) –x+ y-2z +2 =0

11) Determinar a equação do plano ortogonal ao segmento de extremidades P = (0, 3, 2) e Q = (2, 1, 4) em seu ponto médio.

12) Calcular o ângulo entre o plano coordenado yz e o plano x + y + z – 3 = 0.

13) (EN-20) Um raio luminoso parte do ponto A = (– 1, 6, 2), reflete na superfície refletora do plano x = – 5, no ponto E, e atinge o ponto B(2, 2, 4). Indique a soma das coordenadas do ponto E.

a) 25/11 b) 5/14 c) 3/11 d) 2 e) 15/2

14) Encontrar um ponto do eixo y cuja distância ao plano x + 2y – 2z – 2 = 0 é de 2 unidades.

15) Achar a projeção ortogonal do ponto A = (3, 1, 3) sobre o plano α: x + y + z – 4 = 0.

16) Equação geral do plano que passa pelos pontos A = (2, 0, 5) e B = (0, 1, 0) e é perpendicular ao plano α: x + 3y – z – 7 = 0.

17) (EN-18) A imagem de f:IR→IR, dada por $f(x) = 2\cos^2 x + \text{sen } 2x - 1$, é [a, b]. Seja π o plano que passa pelo ponto A(9, – 1, 0) e é paralelo aos vetores $\bar{u} = (0, 1, 0)$ e $\bar{v} = (1, 1, 1)$. Calcule a menor distância do ponto $P\left(\frac{b}{a}, a, 1\right)$ ao plano π e assinale a opção correta.

a) $7\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{11\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{3}$

18) Obter o plano que contém P = (0, 1, 2) e é ortogonal aos planos α_1: x + y – z + 5 = 0 e α_2: 2x + 2y + z + 1 = 0.

19) (EN-17) O plano π_1 passa pela interseção dos planos π_2: x + 3y + 5z – 4 = 0 e π_3: x – y – 2z + 17 = 0. Sendo π_1 paralelo ao eixo y, pode-se afirmar que o ângulo que π_1 faz com o plano π_4: – 2x + 3y + z – 5 = 0 vale:

a) $\theta = \arccos\frac{9}{\sqrt{238}}$ b) $\theta = \arccos -\frac{\sqrt{157}}{9}$ c) $\theta = \arccos -\frac{9}{\sqrt{238}}$

d) $\theta = \arccos\frac{\sqrt{157}}{9}$ e) $\theta = \arccos\frac{\sqrt{238}}{9}$

20) Calcular m para que as retas $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2t + 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = mx + 1 \\ z = -3x \end{cases}$ sejam coplanares.

21) Considere as retas as retas $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = mt \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ e $s: \frac{x+5}{-1} = y + m = \frac{z-6}{m}$. Determine os valores de m para que as retas sejam:

a) ortogonais;
b) paralelas;
c) coplanares.

22) Calcule o(s) valor(s) de m para o(s) qual(is) a reta r: $\begin{cases} x = my + 3 \\ z = (m+1)y - 7 \end{cases}$ seja ortogonal à reta determinada pelos pontos A(4, 0, m) e B(– 5, 2m, 3m).

23) Estabeleça as equações simétricas da reta que passa pelo ponto de interseção das retas r: $1 - x = y = \frac{z-2}{2}$ e s: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ e é, ao mesmo tempo, ortogonal a essas retas.

24) Calcular as equações paramétricas de uma reta s que passa pelo ponto A(1, – 1, 1) e é ortogonal à reta r: $\frac{x-2}{-2} = y = z$.

25) Calcular as equações da reta r que contém o ponto A(2, – 1, 1) e que interceptam a reta s: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$ segundo um ângulo de $\pi/4$ rad.

26) Dados os planos π_1: – 4x + 4y – 4 = 0 e π_2: – 2x + y + z = 0, determine:
(a) a interseção entre π_1 e π_2.
(b) o ângulo entre π_1 e π_2.

27) Estabeleça a equação geral do plano que contém as retas r: $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{5} \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ z = -2y - 1 \end{cases}$.

28) Determinar a equação do plano que passa pela reta interseção dos planos x – 3y – z + 3 = 0 e 3x + y – 2z + 2 = 0 e é perpendicular ao plano yz.

29) Calcule os valores de m e n para que a reta r: $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 4 \end{cases}$ esteja contida no plano π: nx + my – z – 5 = 0.

30) Determinar o ângulo formado entre o plano α: – x + y + 3 = 0 e a reta r: $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{-1}$.

31) Achar a distância do ponto A = (1, 1, 3) à reta determinada pelos pontos P = (4, 3, –2) e Q = (2, 2, 0).

32) Obter as equações simétricas da reta r situada no plano α: 2x + y – z + 1 = 0 e que intercepta ortogonalmente a reta s: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{7}$.

33) Achar a equação do plano que passa pela reta r: $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ e é paralelo à reta s: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{7}$.

34) Determinar a distância da reta r ao plano α, sendo r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$ e α: 4x – y – z + 3 = 0.

35) Achar as equações simétricas da reta que passa pelo ponto P = (3, 5, –2) e é paralela aos planos x + 2y – z + 3 = 0 e x + 2y + 3z + 4 = 0.

36) Achar o ponto A′ simétrico de A = (3, 1, 6) em relação à reta r: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{1}$.

37) A reta r passa por P = (2, –1, 3) e é perpendicular à reta s: $\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 2y - 5z + 24 = 0 \end{cases}$. Achar o ponto de interseção de r e s.

38) Calcular o ponto de interseção das retas $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}$ e $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$.

39) Encontrar as coordenadas do ponto de interseção de α: 2x + 3y + 4z – 1 = 0 com a reta determinada pelos pontos P_1 = (1, 0, 2) e P_2 = (3, 4, 1).

40) Achar a equação do plano que contém as retas $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1}$ e $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

41) Achar a reta r obtida pela interseção do plano α: 2x + 3y + 4z – 12 = 0 com o plano xy.

42) (EN-03) Os pontos (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ que correspondem às soluções do sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 8 \end{cases}$ são representados graficamente por
(A) uma reta paralela ao plano XOY.
(B) uma reta paralela ao ponto XOZ.
(C) uma reta que passa pela origem.
(D) um plano perpendicular ao eixo OY.
(E) um único ponto.

43) (EFOMM-17) Seja A o ponto de interseção entre as retas $r_1: \begin{cases} x = z+3 \\ y = -2z-1 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1-5t \\ 2y = -3+2t \\ z = 5+9t \end{cases}$ e seja B o ponto de interseção entre as retas $r_3: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-3} = z+1$ e $r_4: \begin{cases} 2x = 15+5t \\ 2y = 8+3t \\ 2z = 2+t \end{cases}$. Defina a equação do plano mediador entre os pontos A e B.

a) $3x - 2y - 2z - 6 = 0$
b) $\frac{3}{2}x + 5y - \frac{3}{4}z - 1 = 0$
c) $55x - 37y + 12z = 1$
d) $2x - 3y + z - 12 = 0$
e) $-28x + 12y - 8z + 64 = 0$

44) (EN-86) Os vértices de um triângulo são A (2, 1, 3), B (4, – 1, 2) e C (6, 2, 5). As coordenadas do pé da altura relativa ao vértice A são:
a) (5, 1, 3)
b) (26/5, 6/5, 21/5)
c) (45/11, 1/11, 34/11)
d) (5, 1/2, 7/2)
e) (49/11, -7/22, 59/22)

45) (EN-87) A distância do ponto (1, 0, 2) à reta $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{6}$ vale
a) 4/7
b) 1
c) $\sqrt{35}/7$
d) $\sqrt{82}/7$
e) $\sqrt{105}/7$

46) (EN-97) O gráfico da solução do sistema $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ é, no $\Re^2$ e no $\Re^3$, respectivamente:
a) um ponto e uma reta.
b) uma reta e um plano.
c) um ponto e um ponto.
d) um ponto e um plano.
e) inexistente e uma reta.

47) (EN-04) Sejam α e β dois planos no IR^3 cuja interseção é a reta r. Os vetores $\vec{u} = (2,13)$ e $\vec{v} = (2,1,3)$ são perpendiculares aos planos α e β, respectivamente. A equação da reta s que passa pelo centro da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 9 = 0$ e é paralela a reta r é
a) $\frac{x+3}{2} = y = \frac{z-1}{-3}$
b) $\frac{x+3}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$
c) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-3} = z+1$
d) $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-4}$
e) $\frac{x-3}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$

48) (EN-01) A reta no $\Re^3$ que passa pelo centro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y = 5$ e é perpendicular ao plano $2x - 3y - z + 1 = 0$ tem equações paramétricas
(A) $x = 2 + 2t$, $y = -3 + t$, $z = -t$, $t \in \Re$
(B) $x = 2 + 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = -t$, $t \in \Re$
(C) $x = 1 - 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = -1 - t$, $t \in \Re$
(D) $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = -1 + t$, $t \in \Re$

49) Determine um ponto P de coordenadas inteiras que pertença à reta interseção dos planos: π_1: $3x - 4y + z - 3 = 0$ e π_2: $x + 3y - z = 0$ e cuja distância ao ponto Q(1, 1, – 1) é 9 unidades de medida.

50) (EFOMM-15) Assinale a alternativa que apresenta equações paramétricas da reta r, sabendo-se que o ponto A, cujas coordenadas são (2, – 3, 4), pertence a r e que r é ortogonal às retas $r_1: \begin{cases} x = -2+t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -x-1 \\ z = 3 \end{cases}$.

a) $r: \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{6} = 4 - z$
b) $r: \begin{cases} x = 2+6t \\ y = -3+5t \\ z = 4 \end{cases}$
c) $r: \begin{cases} y = x-5 \\ z = 6-x \end{cases}$
d) $r: \begin{cases} x = 2+6t \\ y = -3+3t \\ z = 4 \end{cases}$
e) $r: \begin{cases} x = 2+6t \\ y = -3+6t \\ z = 4-y \end{cases}$

51) (EN-00) Seja P o ponto de interseção da reta de equações paramétricas $x = t + 1$, $y = 2t - 3$ e $z = -t + 2$ com o plano xy. Qual é a distância do ponto P ao centro da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 4z$?
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{14}$

52) Achar as equações simétricas da reta que passe pelo ponto A = (1, 0, 2), seja paralela ao plano α: $x - z + 2 = 0$ e forme um ângulo de $\pi/6$ rad com o plano β : $x + y - z + 4 = 0$.

53) (EN-05) Seja α o plano que contém a reta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=z+1$ e o ponto P = (–1, 0, 2). A equação do plano β, que é paralelo a α e passa pelo ponto Q = (3, –2, 1) é

a) $x-y+3z-8=0$ b) $2x-5z-1=0$ c) $y+z+1=0$
d) $x+2y+z=0$ e) $x+y-1=0$

54) (EN-07) Seja **r** a reta que contém:
(i) o ponto de interseção das retas

$$r_1:\begin{cases}x=2+3t\\y=4+5t\\z=2t\end{cases} \text{ e } r_2:\begin{cases}\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{4}=z+2\end{cases}$$

(ii) o ponto médio do segmento de extremos A(1, 0, – 1) e B (3, – 4, 3). As equações de **r** são:

a) x = - 1 - 3t; y = -1 – t ; z = - 2 + 3t
b) x = 1 + 3t ; y = -1 – t ; z = - 2 + 3t
c) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}$
d) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$
e) x = 3 + 2t ; y = - 1 - 2t ; z = 3 + t

55) Obter as equações simétricas das retas que passem pelo ponto A = (0, 0, 1), distem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ da origem do sistema cartesiano e sejam paralelas ao plano x – y + 2 = 0.

56) (EN-08) Considere π plano que contém o centro da esfera $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+13=0$ e a reta de equações paramétricas.

$$\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3+2t\end{cases},\ t\in\Re.$$

O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume

a) $\frac{50}{3}$ b) $\frac{50}{9}$ c) $\frac{100}{9}$ d) $\frac{200}{9}$ e) $\frac{100}{3}$

57) (EN-11) Considere r e s retas no IR^3 definidas por $r:\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=2+3t\end{cases}$, $t\in IR$ e $s:\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z=0\end{cases}$. Se θ é o ângulo o formado pelas retas r e s, então cossec θ vale

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$ d) $\frac{\sqrt{42}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{42}}{7}$

58) Calcule os valores de a e b para que a reta $r:\begin{cases}x=3+at\\y=2-bt\\z=7-2t\end{cases}$ seja paralela à reta que é simultaneamente ortogonal às retas $s:\begin{cases}y=2x-8\\z=-3x+1\end{cases}$ e $t:\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-6}{6}$.

59) (EN-13) Considere π o plano que contém o centro da esfera $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+13=0$ e a reta de equações paramétricas $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3+2t\end{cases}$, $t\in IR$. O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume,

a) 50/3 b) 50/9 c) 100/3 d) 200/9 e) 100/9

60) (EN-16) Uma reta r passa pelo ponto M(1, 1, 1) e é concorrente às seguintes retas: $r_1:\begin{cases}x=-1+3t\\y=-3-3t\\z=2-t\\t\in IR\end{cases}$ e $r_2:\begin{cases}x=4-t\\y=2-5t\\z=-1+2t\\t\in IR\end{cases}$. Pode-se dizer que as equações paramétricas dessa reta r são

a) $\begin{cases}x=1+11t\\y=1+22t\\z=1-25t\\t\in IR\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=1+25t\\y=1+22t\\z=1+8t\\t\in IR\end{cases}$ c) $\begin{cases}x=1+8t\\y=1+22t\\z=1-25t\\t\in IR\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=1-12t\\y=1+11t\\z=1+4t\\t\in IR\end{cases}$ e) $\begin{cases}x=1-25t\\y=1+22t\\z=1+8t\\t\in IR\end{cases}$

61) (EN-20) Um círculo, contido no plano $x - 2y + 4 = 0$, de centro (4, 4, 4) e raio $\sqrt{5}$, é projetado ortogonalmente no plano $y = 0$, formando uma figura plana de área, em unidades de área, igual a:

a) $2\sqrt{5}\pi$ b) 4π c) 5π d) $5\sqrt{2}\pi$ e) 10π

62) Determinar a equação do plano que contém o ponto A = (2, 1, 3) e é paralelo às retas $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 3 \end{cases}$.

63) (EN-20) Suponha que duas aeronaves da Marinha estejam fazendo um voo de modo que suas trajetórias estejam contidas no plano x'y', de um sistema cartesiano ortogonal x'y'z', no instante de tempo t_0. Em um instante t_1, os pilotos precisam alcançar uma certa altura z'_1 e recebem as seguintes determinações:

I – A aeronave A deve fazer seu voo sobre a reta $r: \begin{cases} x' = 1 + t \\ y' = 1 + t/2 \\ z' = t \end{cases}$ com $t \in IR$

II – A aeronave B deve fazer seu voo sobre a reta m que é paralela a r, que está contida no plano $x' - 4y' + z' = 0$ e que dista $\frac{\sqrt{20}}{3}$ do ponto P(1, 0, 1).

Considerando que r, m e P estão no sistema x'y'z', assinale a opção que representa uma possível trajetória da aeronave B a partir de t_1 até alcançar a altura z'_1.

a) m: (1, – 1, 1) + λ(1, 1/2, 2) com λ∈IR
b) m: (– 1, 0, – 1) + λ(1, 1/2, 2) com λ∈IR
c) m: (1, – 1, 1) +λ(2, 1, 4) com λ∈IR
d) m: (– 1, 0, 1) + λ(2, 1, 2) com λ∈IR
e) m: (1, 0, – 1) + λ(2, 1, 2) com λ∈IR

64) (EN-21) Sejam as retas no IR^3, $r_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ com λ∈IR e $r_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, com μ∈IR. Tomando o plano α definido pelas retas r_1 e r_2, α intersecta o eixo z no valor de z igual a:

a) – 5 b) 0 c) 2 d) 10 e) 15

65) Determinar a equação da reta r que passa pelo ponto A = (3, 2, 1), é paralela ao plano α: x + y + z – 2 = 0 e ortogonal à reta s: x = 2y = 3z.

66) (EN-21) Sejam π_1 e π_2 dois planos cujas equações vetoriais são, respectivamente, X = (1, 0, 0) + β(1, 1, 1) + γ(– 1, 0, 2) e Y = (2, 0, – 1) + α(1, 2, 1) + λ(0, 1, 1) com β, γ, α e λ números reais. Assinale a opção que apresenta uma equação vetorial da reta r, dada pela interseção desses planos.

a) (1, 0, 0) + k(2, 1, – 1), k∈IR b) (1, 0, 0) + k(2, – 1, 1), k∈IR
c) (1, 0, 0) + k(– 2, – 1, – 1), k∈IR d) (1, 0, 0) + k(– 2, 1, 1), k∈IR
e) (1, 0, 0) + k(2, 1, 1), k∈IR

67) Determine as equações paramétricas do plano que contém a reta $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e é perpendicular ao plano 2x + y – z + 5 = 0.

68) (EN-22) Seja o plano α de equação α: $\vec{w} = \vec{a} + p.\vec{v} + q.\vec{u}$, p, q∈IR, com $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. O volume do tetraedro que possui vértices na origem (0, 0, 0) e nas interseções de α com os eixos coordenados é igual a

a) 1/3 b) 3/5 c) 1/5 d) 3/10 e) 2/5

69) Determine as equações reduzidas da reta r que passa pelo ponto P(3, 5, 2) e é simultaneamente ortogonal ao eixo x e à reta $s: \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y - 3}{-2} = z + 1 \end{cases}$.

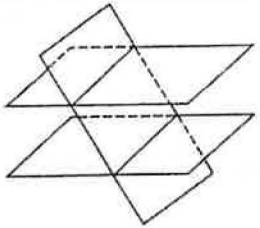
70) (EN-22) Suponha que dias aeronaves da Marinha do Brasil, F1 e F2, estejam percorrendo as trajetórias dadas pelas retas r: X = (– 1, 2, 0) + β(1, 3, 1) e s: $\begin{cases} 3x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$, respectivamente. É correto afirmar que a distância entre essas retas é igual a:

a) $\frac{7\sqrt{7}}{12}$ b) $\frac{6}{\sqrt{23}}$ c) $\frac{6\sqrt{21}}{7}$ d) $\frac{12}{\sqrt{46}}$ e) $\frac{4\sqrt{21}}{8}$

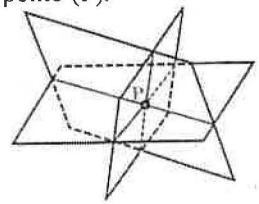
71) (EN-22) No 3, a equação $ax + by + cz + d = 0$, com as constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, podem representar um plano. Assinale a opção que esboça a representação geométrica dos planos no sistema linear abaixo

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ -5x + 3y - 4z + 6 = 0 \\ -x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

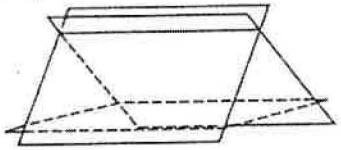
a) Dois planos distintos paralelos e um secante a eles.



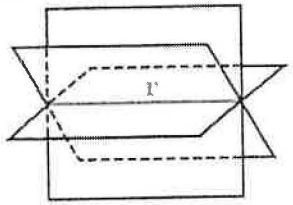
b) Planos concorrentes em um ponto (P).



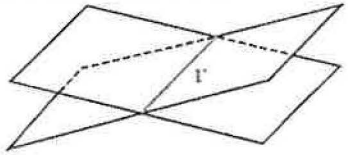
c) Planos secantes dois a dois.



d) Planos concorrentes em uma reta (r).



e) Dois planos coincidentes e um secante a eles.



LÓGICA

6.1. PROPOSIÇÃO

Uma proposição é uma declaração afirmativa à qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso, mas não ambos. Por exemplo, "Belém é a capital do Pará" é uma proposição verdadeira (V). Por outro lado, "Quatro é menor que um" é uma proposição falsa (F). A proposição é o elemento básico a partir do qual os argumentos são construídos, sendo também o principal objeto de estudo na lógica proposicional.

É importante destacar que algumas sentenças declarativas também não podem ser analisadas, principalmente quando contém algum tipo de ambiguidade, não permitindo que seja atribuído um valor lógico (verdadeiro ou falso). Por exemplo, na sentença "Fiquei sabendo se seu novo emprego na escola". A ambiguidade ocorre, pois não é possível precisar se a pessoa estava na escola quando soube do emprego do amigo ou se o novo emprego do amigo é numa escola.

Deste modo, proposições são sentenças onde é possível associar apenas um valor lógico: verdadeiro ou falso. Normalmente, as proposições são simbolizadas por letras minúsculas (por exemplo: p, q, r, s, t, ...).

Abaixo estão descritos alguns exemplos de proposições válidas:

p: Marcelo torce pro Paysandu

q: 4 é um número primo

Caso a proposição p seja verdadeira, ou seja, Marcelo torce pro Paysandu, então podemos afirmar que o valor lógico da proposição p é verdadeiro. Simbolicamente tem-se que

$$VL(p) = V$$

No caso da proposição q, que claramente falsa, uma vez que 4 não é primo, segue que:

$$VL(q) = F$$

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa. Desta forma, dada uma proposição p, ela é ou verdadeira ou falsa e nunca assume os dois estados ao mesmo tempo. O nome que se dá pra esse conceito é **princípio da não contradição**.

6.2. NEGAÇÃO

Dada uma proposição p, se chama de **negação de p** a proposição representada por "não p", no qual o valor lógico é verdade quando p é falso e falso quando o valor de p é verdadeiro. Desta forma, "não p" tem o valor lógico oposto daquele de p. Simbolicamente, a negação de uma proposição é representada por **~p**, que é lida como "não p".

O valor lógico da negação de uma proposição é, portanto, definido pela tabela abaixo, denominada **tabela verdade**.

p	~p
V	F
F	V

Uma tabela verdade representa as relações entre os valores lógicos de proposições. A tabela verdade acima está afirmando que de p é V então ~p é F e se p é F então ~p é V.

6.3. PROPOSIÇÃO SIMPLES E COMPOSTA

Proposições podem ser classificadas como simples ou compostas. Uma proposição é classificada como quando a sentença é composta de uma única proposição. São exemplos de proposições simples:

p: A camisa é vermelha

q: Maria é professora

Se a sentença é composta de duas ou mais proposições, então temos uma proposição composta. É necessário que essas proposições estejam conectadas entre si, formando uma só sentença. Por exemplo, podemos conectar as proposições p e q, citadas anteriormente, com conectores lógicos:

r: A camisa é vermelha e Maria é professora

6.2.1. Conectivos

Se p e q são duas proposições, então "p e q" é também uma proposição. Podemos dizer que:

- "p e q" é denominada conjunção de p e q;
- "p e q" é representada por **p∧q**.

Se ambas as proposições, p e q, são verdadeiras, então p∧q é verdadeira, senão p∧q é falsa. Essa relação pode ser representada pela tabela verdade:

p	**q**	**p∧q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Como aplicação, nas quatro proposições apenas a primeira é verdadeira:

"4 > 1 e 2 < 5"

"4 > 1 e 2 > 5"

"4 < 1 e 2 < 5"

"4 < 1 e 2 > 5"

Se p e q são duas proposições então "p ou q" é também uma proposição. Podemos dizer que:

- "p ou q" é denominada disjunção de p e q;
- "p ou q" é representada por **p∨q**.

De acordo com o esquema de representação adotado acima, dizemos que se pelo menos uma das proposições, p ou q, é verdadeira então p∨q é verdadeira, senão p∨q é falsa. Representando numa tabela verdade fica da seguinte forma:

p	**q**	**p∨q**
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Por exemplo, das quatro proposições seguintes apenas a primeira é falsa:

"4 < 1 ou 2 > 5"

"4 < 1 ou 2 < 5"

"4 > 1 ou 2 > 5"

"4 > 1 ou 2 > 5"

Chamamos de disjunção exclusiva de duas proposições p e q, cuja simbologia é $p \veebar q$, cujo valor lógico é V somente quando $V(p) \neq V(q)$ e F quando $V(p) = V(q)$, ou seja, quando são ambas falsas ou ambas verdadeiras. A expressão $p \veebar q$ é lida como "ou p ou q". A tabela verdade para o operador binário disjunção exclusiva é dada por:

p	**q**	**p ⊻ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6.4. CONDICIONAIS

Dada duas proposições p e q, define-se por **condicional** o operador "se" (simbolicamente representado por →), onde "**p → q**" possui o valor lógico falso se p for verdade e q for falso. Em todos os outros casos o valor lógico sempre será verdadeiro. A representação "p → q" é lida da forma "se p então q". O valor lógico do condicional de duas proposições é, portanto, definido pela tabela verdade a seguir:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Vejamos alguns exemplos:

(a) p: Ana nasceu em Belém
q: Ana nasceu no Brasil
p → q: Se Ana nasceu em Belém então Ana nasceu no Brasil
Aqui temos um exemplo de condicional verdadeira, uma vez que tanto p quanto q são verdadeiras. Em linguajar matemático: V → V = V

(b) p: Ana nasceu em Manaus
q: Ana nasceu na Argentina
p → q: Se Ana nasceu em Manaus então Ana nasceu na Argentina
Aqui temos um exemplo de condicional falsa, desde que p é verdadeira e q é falsa. Em linguajar matemático: V → F = F

(c) p: Buenos Aires fica no Brasil
q: Fortaleza fica no Brasil
p → q: Se Buenos Aires fica no Brasil então Fortaleza fica no Brasil
Aqui temos um exemplo de condicional verdadeira, pois, apesar de p ser falsa, q é verdadeira. Em linguajar matemático: F → V = V

(d) p: Buenos Aires fica no Brasil
q: Fortaleza fica na Argentina
p → q: Se Buenos Aires fica no Brasil então Fortaleza fica na Argentina
Esse é o exemplo que mais confunde os alunos, mas a condicional é verdadeira! É importante destacar que p → q não significa que q é uma consequência de p, ou seja, não podemos afirmar que é possível deduzir q a partir de p. Em linguajar matemático: F → F = V

Denominamos de **bicondicional** toda proposição que é definida da forma "p, se e somente se q", simbolicamente representada por p ↔ q, e cujo valor lógico é verdadeiro quando V(p) = V(q) e falso quando V(p) ≠ V(q). Em outras palavras, o operador **bicondicional** nada mais é que a dupla aplicação do operador condicional, ou seja, o resultado de uma bicondicional é verdadeiro apenas quando p → q e q →

p são ambas verdadeiras. A tabela verdade para o operador binário bicondicional é dada por:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Verifique os exemplos seguintes:

(a) p: 51 é múltiplo de 3
q: a soma dos dígitos de 51 é múltipla de 3
p ↔ q: 51 é múltiplo de 3 se e somente se a soma dos dígitos de 51 é múltipla de 3
Caso clássico de bicondicional verdadeira, onde p e q são verdadeiras: V ↔ V = V.

(b) p: Bia nasceu em São Paulo
q: Bia é argentina
p ↔ q: Bia nasceu em São Paulo se e somente se Bia é argentina
Exemplo de bicondiocional falsa, desde que q é falsa: V ↔ F = F

(c) p: Um quilo tem 100 gramas
q: Um metro tem 100 centímetros
p ↔ q: Um quilo tem 100 gramas se e somente se um metro tem 100 centímetros
Mais um caso de bicondicional falsa, pois p é falsa e q é verdadeira: F ↔ V = F

(d) p: um triângulo tem 4 lados
q: um quadrado tem 3 lados
p ↔ q: um triângulo tem 4 lados se e somente se um quadrado tem 3 lados
Esse caso sempre confunde, mas é um caso de bicondicional verdadeiro: F ↔ F = V.

6.5. TAUTOLOGIAS

Tautologias são proposições compostas sempre verdadeiras, isto é, em suas tabelas verdade a última coluna é composta contêm somente por valores verdadeiros. Para que uma proposição seja classificada como uma tautologia é necessário analisar o formato da proposição, ou seja, da ordem como os símbolos proposicionais são combinados com os conectivos e com os parênteses para a formação da proposição.

Por exemplo, p → (p ∨ q) é uma tautologia. De fato:

p	q	p ∨ q	p → (p ∨ q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Observe os seguintes exemplos:

(a) p: 4 > 1
q: 2 < 5
p → (p ∨ q): Se 4 > 1 então 4 > 1 ou 2 < 5
Note que p → (p ∨ q) é verdadeiro, pois como 4 > 1 é verdadeiro basta que p ou q sejam verdadeiros (os dois são verdadeiros): V → (V ∨ V) é verdadeiro
(b) p: 4 > 1
q: 2 > 5
p → (p ∨ q): Se 4 > 1 então 4 > 1 ou 2 > 5
p → (p ∨ q) é verdadeiro pelo mesmo motivo que caso anterior: V → (V ∨ F) é verdadeiro
(c) p: 4 < 1
q: 2 < 5
p → (p ∨ q): Se 4 < 1 então 4 > 1 ou 2 < 5
Nesse caso p → (p ∨ q) é verdadeiro desde que 2 < 5: F → (F ∨ V) é verdadeiro
(d) p: 4 < 1
q: 2 > 5
p → (p ∨ q): Se 4 < 1 então 4 > 1 ou 2 > 5
p → (p ∨ q) é verdadeiro, já que F → F é verdadeiro: F → (F ∨ F) é verdadeiro

6.6. CONTRADIÇÃO

O conceito de contradição é o contrário ao de tautologia. Chamamos de contradição toda proposição composta cuja última coluna da tabela verdade é inteiramente composta por valores lógicos falsos. Em outras palavras, é uma proposição que é sempre falsa, independentemente dos valores de suas proposições intermediárias. Desta forma, P é uma tautologia se e somente se ~P é uma contradição.

Por exemplo, a proposição P = (p ∧ q) ∧ ~ (p ∨ q) é uma contradição, como pode ser comprovado pela tabela verdade:

p	q	p ∧ q	p ∨ q	~ (p ∨ q)	(p ∧ q) ∧ ~ (p ∨ q)
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

6.7. ARGUMENTO VÁLIDO

Podemos expressar padrões de raciocínio de diversas maneiras. Na linguagem natural, em geral, a conclusão é colocada após as premissas e indicada por algumas palavras-chave como então, logo, portanto, como consequência, conclui-se, ... Dizemos que um argumento é válido se a conclusão segue logicamente as premissas ou, em outras palavras, se a conclusão é uma consequência lógica das premissas.

Um argumento é uma sequência $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ de proposições, com $n \geq 1$, na qual as $n - 1$ primeiras proposições p_i são chamadas de premissas e a última proposição, p_n, é chamada de conclusão. Denota-se um argumento por:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n$$

Um argumento $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{n-1}$ é válido se somente se p_n é uma consequência lógica de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{n-1}$ que ocorre se $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n$ for uma tautologia. Um argumento válido pode ser lido de diversas maneiras, dentre as quais:

- $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{n-1}$ acarretam p_n
- p_n decorre de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{n-1}$
- p_n é consequência lógica de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{n-1}$

Uma maneira de verificar a veracidade de um argumento é lançando mão de tabelas verdades, por mais trabalho que isso represente quando se aumenta o número de premissas.

Observe o exemplo seguinte pra compreender melhor a aplicação da tabela verdade na verificação de argumentos.
Se Carlos está com fome, então, ele come.
Carlos dorme ou não come.
Carlos está acordado.
Portanto, Carlos não está com fome.

Inicialmente, vamos dar nome a algumas proposições:
p: Carlos está com fome
q: Carlos come
r: Carlos está acordado

Portanto, o argumento é descrito como:
Se Carlos está com fome, então, ele come: p → q
Carlos dorme ou não come: ~r ∨ ~q
Carlos está acordado: r
Carlos não está com fome: ~p

A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = (((p \rightarrow q) \wedge (\sim r \vee \sim q) \wedge r) \rightarrow \sim p)$$

Montando a tabela verdade:

p	q	r	~p	~q	~r	p→q	~r∨~q	(p→q)∧(~r∨~q)∧r	P
V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	F	V

Como a forma condicional do argumento é tautológica, ou seja, ~p é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

6.8. NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

No item 6.2 foi enunciado que a "negação da proposição p" é a proposição lógica que possui valor lógico contrário ao valor lógico de p. É indicada simbolicamente de forma mais frequente por "~***p***".

Podemos também considerar a negação de uma proposição composta. Por exemplo, sabe-se que a tabelas verdade a seguir refere-se à condicional entre as proposições p e q:

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dizemos que duas proposições são logicamente equivalentes quando possuem a mesma tabela verdade, ou seja, suas tabelas verdade apresentam os mesmos resultados. De maneira menos formal, tem-se que duas proposições lógicas são equivalentes se transmitem a mesma informação. Observe a tabela verdade da proposição composta ~p∨q

p	q	~p∨q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observamos que os resultados das duas tabelas são os mesmos para os mesmos valores lógicos das entradas ***p*** e ***q***. Sendo assim, as proposições p → q e ~p ∨ q são equivalentes entre si.

O leitor pode achar meio confuso compreender porque essas duas proposições compostas são equivalentes. Vamos agora apresentar um exemplo cotidiano, onde ficará mais claro que possuem o mesmo significado, transmitem a mesma ideia:

Se comer besteira então irá se arrepender — Não coma besteira ou irá se arrepender

p → q — ~p ∨ q

Quando uma proposição composta for equivalente à negação de outra proposição composta, afirmamos que a primeira é negação da segunda. No caso apresentado, é possível afirmar que de p → q é equivalente a ~p ∨ q.

A seguir estão listadas as proposições lógicas mais comuns e suas respectivas negações.

(a) Condicional: p → q
Negação: p ∧ ~q
Exemplo:
Proposição: Se tiro boas notas então passarei de ano
Negação: Tiro boas notas, mas não passarei de ano

(b) Disjunção: p ∨ q
Negação: ~p ∧ ~q
Exemplo:
Proposição: Mário é rico ou Ana é pobre
Negação: Mário é pobre e Ana é rica

(c) Conjunção: p ∧ q
Negação: (~p) ∨ (~q)
Exemplo:
Proposição: Mário é pobre e Ana é rica
Negação: Mário é rico ou Ana é pobre

(d) Bicondicional: p ↔ q
Negação: p ⊻ q
Exemplo:
Proposição: Mário é pobre se e somente se Ana é rica
Negação: ou Mário é pobre ou Ana é rica

(e) Disjunção Exclusiva: p ⊻ q
Exemplo:
Proposição: ou Mário é pobre ou Ana é rica
Negação: Mário é pobre se e somente se Ana é rica

(f) Todo x é y
Negação: Algum x não é y
Exemplo:
Proposição: Todo corintiano é fanático
Negação: Algum corintiano não é fanático

(g) Nenhum x é y
Negação: Algum x é y
Exemplo:
Proposição: Nenhum professor é rico
Negação: Algum professor é rico

(h) Algum x é y
Negação: Nenhum x é y
Exemplo:
Proposição: Algum professor é rico
Negação: Nenhum professor é rico

(i) Algum x não é y
Negação: Todo x é y
Exemplo:
Proposição: Algum professor não é feliz
Negação: Todo professor é feliz

Exercícios Resolvidos

01) Considere as proposições lógicas simples abaixo:
• p: "Rodrigo é professor".
• q: "Marta é diretora".
A negação da proposição lógica composta "Se Marta não é diretora, então Rodrigo é professor" é corretamente simbolizada, segundo a lógica, por:
A) $\sim q \leftrightarrow p$. B) $q \vee p$. C) $\sim q \wedge \sim p$.
D) $\sim q \vee p$. E) $\sim q \rightarrow p$.
Solução: Alternativa C
A negação da proposição é "Marta não é diretora e Rodrigo não é professor", que é equivalente ao que está escrito na alternativa C.

02) Se P, Q e S são proposições verdadeiras, então o valor lógico de $(P \vee Q) \rightarrow \sim S$ é:
A) Falso. B) Verdadeiro. C) Duvidoso.
D) Incerto. E) Impossível de saber.
Solução: Alternativa A

P	Q	P ∨ Q	S	~S
V	V	V	V	F

Assim, a condicional inicia com V e termina com F, ou seja, V → F. Nesse caso, sabemos que resulta em F.

03) Considere a proposição lógica composta $(p \wedge q) \rightarrow r$, cujo valor lógico é falso. Então, é correto afirmar que os valores lógicos das proposições p, q e r são respectivamente:
A) V – V – F. B) V – F – V. C) F – V – V.
D) F – F – V. E) F – F – F.
Solução: Alternativa A
Por ser uma condicional falsa, deve ser do tipo V→F, ou seja, p∧q é V e r é F.
A única possibilidade de p∧q ser V é p ser V e q ser V ⇒ V – V – F

04) Considerando que p, q, r e s sejam proposições nas quais p e s sejam verdadeiras e q e r sejam falsas, assinale a opção em que a sentença apresentada seja verdadeira.
a) ~(p ∨ r)∧(q ∧ r)∨q
b) ~s ∨ q
c) ~(~q ∨ q)
d) ~[(~p ∨ q)∧(~q ∨ r)∧(~r ∧ s)]∨(~p ∨ s)
e) (p ∧ s)∧(q∨~s)
Solução: Alternativa D
a) ~(p ∨ r)∧(q ∧ r)∨q ⇒ ~(V ∨ F)∧(F ∧ F)∨F ⇒ ~(V)∧(F)∨F ⇒ ~F∧F∨F = F
b) ~s ∨ q ⇒ F ∨ F = F
c) ~(~q ∨ q) ⇒ ~(V ∨ F) ⇒ ~(V) = F
d) ~[(~p ∨ q)∧(~q ∨ r)∧(~r ∧ s)]∨(~p ∨ s) ⇒
~[(F ∨ F)∧(V ∨ V)∧(V ∧ V)]∨(F ∨ V) ⇒ ~(F ∧ V ∧ V) = ~(F) = V
e) (p ∧ s)∧(q∨~s) ⇒ (V ∧ V) ∧ (F ∨ F) ⇒ V ∧ F = F

05) A negação da frase "O Sol é uma estrela e a Lua não é um planeta", de acordo com a equivalência lógica, a frase é:
a) O Sol não é uma estrela e a Lua é um planeta
b) O Sol não é uma estrela ou a Lua não é um planeta
c) O Sol é uma estrela ou a Lua é um planeta
d) O Sol é uma estrela ou a Lua não é um planeta
e) O Sol não é uma estrela ou a Lua é um planeta

Solução: Alternativa E

A negação de $p \wedge q$ é $\sim p \vee \sim q$.

Em outras palavras, nega-se cada proposição e troca-se "e" por "ou".

Logo, a negação é "O Sol não é uma estrela ou a Lua é um planeta."

06) Se o jardim não é florido, então o gato mia. Se o jardim é florido, então o passarinho não canta. Ora, o passarinho canta. Logo:

a) O jardim é florido e o gato mia;
b) O jardim é florido e o gato não mia;
c) O jardim não é florido e o gato mia;
d) O jardim não é florido e o gato não mia;
e) Se o passarinho canta então o gato não mia.

Solução: Alternativa C

Sabe-se que se p implica q então não q implica não p.

A proposição "Se o jardim é florido, então o passarinho não canta" é da forma "se p implica q". Porém, logo depois é informado que q (o passarinho não canta) é falso, fazendo com que a afirmação "o jardim é florido" seja falsa também.

Como "**o jardim não é florido**" é verdadeira, conclui-se que "**o gato mia**", segundo a primeira proposição.

07) Se todos os nossos atos têm causa, então não há atos livres. Se não há atos livres, então todos os nossos atos têm causa. Logo,

a) alguns atos não têm causa se não há atos livres.
b) todos os nossos atos têm causa se e somente se há atos livres.
c) todos os nossos atos têm causa se e somente se não há atos livres.
d) todos os nossos atos não têm causa se e somente se não há atos livres.
e) alguns atos são livres se e somente se todos os nossos atos têm causa

Solução: Alternativa C

Sejam:

P: Todos os nossos atos têm causas

Q: Não há atos livres

As duas afirmações equivalem a: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Perceba que temos um bicondicional, pois, trocando P e Q de lugar tem-se a mesma proposição.

Logo, é possível afirmar que $P \leftrightarrow Q$, ou seja, "todos os nossos atos têm causa se e somente se não há atos livres."

08) Carlos não ir ao Canadá é condição necessária para Alexandre ir à Alemanha. Helena não ir à Holanda é condição suficiente para Carlos ir ao Canadá. Alexandre não ir à Alemanha é condição necessária para Carlos não ir ao Canadá. Helena ir à Holanda é condição suficiente para Alexandre ir à Alemanha. Portanto:

a) Helena não vai à Holanda, Carlos não vai ao Canadá, Alexandre não vai à Alemanha.
b) Helena vai à Holanda, Carlos vai ao Canadá, Alexandre não vai à Alemanha.
c) Helena não vai à Holanda, Carlos vai ao Canadá, Alexandre não vai à Alemanha.
d) Helena vai à Holanda, Carlos não vai ao Canadá, Alexandre vai à Alemanha.
e) Helena vai à Holanda, Carlos não vai ao Canadá, Alexandre não vai à Alemanha.

Solução: Alternativa C

Considere as sentenças:

A: Helena não vai a Holanda

B: Carlos vai ao Canadá

C: Alexandre vai a Alemanha

Segundo as proposições:

$$B \rightarrow C,\ A \rightarrow B,\ \sim C \rightarrow B,\ \sim A \rightarrow C$$

Vamos tomar como verdadeira a sentença "Helena não vai a Holanda".

Portanto: A é V, B é V e C é F

Analisando cada alternativa:

a) $A \wedge \sim B \wedge \sim C$ é equivalente a $V \wedge F \wedge V = F$
b) $\sim A \wedge B \wedge \sim C$ é equivalente a $F \wedge V \wedge V = F$
c) $A \wedge B \wedge \sim C$ é equivalente a $V \wedge V \wedge V = V$
d) $\sim A \wedge \sim B \wedge C$ é equivalente a $F \wedge F \wedge F = F$
e) $\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C$ é equivalente a $F \wedge F \wedge V = F$

09) (EN-98) Considere a proposição: "Se $x > 5$ então $y = 6$". A proposição equivalente é:

a) "Se $x < 5$ então $y \neq 6$" b) "Se $y \neq 6$ então $x < 5$" c) "Se $y > 5$ então $x = 5$"
d) "Se $y \neq 6$ então $x \leq 5$" e) "Se $x \leq 5$ então $y \neq 6$"

Solução: Alternativa D

"se p implica q" é equivalente a "se não q implica não q"

Definindo:

p: $x > 5$

q: $y = 6$

Logo, a expressão equivalente é "Se $y \neq 6$ então $x \leq 5$".

Exercícios Propostos

01) A negação da proposição "Antônio passa na prova ou vai ao cinema em Novo Horizonte" é:
A) Antônio não passa na prova.
B) Antônio não vai ao cinema em Novo Horizonte.
C) Antônio não passa na prova ou não vai ao cinema em Novo Horizonte.
D) Antônio não passa na prova e não vai ao cinema em Novo Horizonte.
E) Se Antônio passa na prova, então vai ao cinema em Novo Horizonte.

02) Analise os itens a seguir:
I) A proposição composta "Se Maria contribuiu durante 35 anos, então ela terá direito ao seguro" é equivalente à proposição "Se Maria não contribuiu durante 35 anos, então ela não terá direito ao seguro".
II) Se a afirmativa "todos os beija-flores voam rapidamente" for considerada falsa, então a afirmativa "algum beija-flor não voa rapidamente" tem de ser considerada verdadeira.
III) "Ele é um ótimo ator" é uma proposição lógica simples.
Está correto o que se afirma:
A) Apenas em I. B) Apenas em II. C) Apenas em III.
D) Apenas em I e II. E) Apenas em I e III.

03) Frederico, Conrado e Hamilton são casados com Jaqueline, Neide e Silene, mas não se sabe quem são os casais. Eles trabalham como bombeiro, policial e cabeleireiro, mas não se sabe ao certo quem trabalha em cada profissão. Levando em consideração os argumentos dados e as seguintes informações, defina os casais e as profissões dos três homens:
I. O cabeleireiro é casado com Silene.
II. Hamilton é policial.
III. Neide não é casada com Hamilton.
IV. Conrado não é cabeleireiro.
A) Frederico é cabeleireiro e casado com Silene; Hamilton é policial e casado com Jaqueline; Conrado é bombeiro e casado com Neide.
B) Frederico é bombeiro e casado com Jaqueline; Hamilton é cabeleireiro e casado com Silene; Conrado é policial e casado com Neide.
C) Frederico é policial e casado com Neide; Hamilton é bombeiro e casado com Silene; Conrado é cabeleireiro e casado com Jaqueline.
D) Frederico é cabeleireiro e casado com Jaqueline; Hamilton é bombeiro e casado com Neide; Conrado é policial e casado com Silene.
E) Frederico é bombeiro e casado com Silene; Hamilton é policial e casado com Silene; Conrado é cabeleireiro e casado Jaqueline.

04) As proposições seguintes constituem as premissas de um argumento.
• Bianca não é professora.
• Se Paulo é técnico de contabilidade, então Bianca é professora.
• Se Ana não trabalha na área de informática, então Paulo é técnico de contabilidade.
• Carlos é especialista em recursos humanos, ou Ana não trabalha na área de informática, ou Bianca é professora.
Assinale a opção correspondente à conclusão que torna esse argumento um argumento válido.
a) Paulo não é técnico de contabilidade e Ana não trabalha na área de informática.
b) Carlos não é especialista em recursos humanos e Paulo não é técnico de contabilidade.
c) Ana não trabalha na área de informática e Paulo é técnico de contabilidade.
d) Carlos é especialista em recursos humanos e Ana trabalha na área de informática.
e) Bianca não é professora e Paulo é técnico de contabilidade.

05) Assinale a opção que apresenta um argumento lógico válido.
a) Todos os garotos jogam futebol e Maria não é um garoto, então Maria não joga futebol.
b) Não existem cientistas loucos e Pedro não é louco. Logo, Pedro é um cientista.
c) O time que ganhou o campeonato não perdeu nenhum jogo em casa, o vice colocado também não perdeu nenhum jogo em casa. Portanto, o campeão é o vice colocado.
d) Todas as aves são humanas e nenhum cachorro é humano, logo nenhum cachorro é uma ave.
e) Em Brasília moram muitos funcionários públicos, Gustavo é funcionário público. Logo, Gustavo mora em Brasília.

06) (OBRL-21) Uma proposição é uma frase declarativa que pode ser valorada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não como ambas. As proposições são usualmente simbolizadas por letras maiúsculas do alfabeto, como, por exemplo, J, K, L, M, etc. Considere as proposições seguintes.
J: "O Verão de 2022 foi ensolarado";
K: "O Verão de 2022 foi chuvoso";
L: "O Verão de 2022 será sensacional".
T: "Se o Verão de 2022 for ensolarado e chuvoso, não será sensacional";
Nesse caso, a tradução para a linguagem simbólica da proposição "T" pode ser expressa, por:
a) $\sim J \vee \sim K \leftrightarrow \sim L$ b) $J \wedge \sim K \vee \sim L$ c) $J \wedge K \rightarrow \sim L$
d) $J \vee K \rightarrow \sim L$ e) $J \leftrightarrow K \rightarrow \sim L$

07) Considere as seguintes proposições.
P_1: Se há investigação ou o suspeito é flagrado cometendo delito, então há punição de criminosos.
P_2: Se há punição de criminosos, os níveis de violência não tendem a aumentar.
P_3: Se os níveis de violência não tendem a aumentar, a população não faz justiça com as próprias mãos.
Pretende-se acrescentar ao conjunto de proposições P_1, P_2 e P_3 uma nova proposição, P_0, de modo que o argumento formado pelas premissas P_0, P_1, P_2 e P_3, juntamente com a conclusão "A população não faz justiça com as próprias mãos" constitua um argumento válido. Assinale a opção que apresenta uma proposta correta de proposição P_0.
a) Há investigação ou o suspeito é flagrado cometendo delito.
b) Não há investigação ou o suspeito não é flagrado cometendo delito.
c) Não há investigação e o suspeito não é flagrado cometendo delito.
d) Se o suspeito é flagrado cometendo delito, então há punição de criminosos.
e) Se há investigação, então há punição de criminosos.

08) Considere que para determinada proposição P_3, o argumento formado pelas premissas P_1, P_2 e P_3 e pela conclusão C constitui um argumento válido. Nesse caso, é correto afirmar que P_3 poderia ser a seguinte proposição:
a) Eu não fiquei mais rico.
b) Eu me beneficiei das minhas decisões.
c) Houve desperdício de recursos municipais em minha gestão.
d) Como eu não me beneficiei, não houve má-fé em minhas decisões.
e) Como eu não fiquei mais rico, eu não me beneficiei das minhas decisões.

09) Se as proposições (i) "Se Jonas estiver de folga, então Paulo e Mauro irão à reunião"; (ii) "Se Paulo ou Raul forem a reunião, então Mauro não irá à reunião" e (iii) Mauro irá à reunião" forem verdadeiras é correto concluir que
a) Jonas não estará de folga e Raul irá à reunião.
b) Jonas estará de folga e Raul não irá à reunião.
c) ou Jonas estará de folga ou Raul irá à reunião.
d) Jonas estará de folga e Raul irá à reunião.
e) Jonas não estará de folga e Raul não irá à reunião.

10) Uma afirmação equivalente a "Se o imposto foi pago, então o empresário está sem dívida" é:
a) O imposto foi pago ou o empresário está sem dívida.
b) O imposto não foi pago e o empresário está sem dívida.
c) O imposto não foi pago ou o empresário está sem dívida.
d) O imposto foi pago ou o empresário não está sem dívida.

11) Considere o seguinte argumento: "Se andar rápido fizesse bem, coelhos não morreriam cedo. Logo, andar rápido não faz bem". Assinale a opção em que é apresentada a premissa que deve ser incluída no argumento acima para que ele seja válido.
a) Coelhos andam rápido.
b) Andar rápido faz bem e coelhos não morrem cedo.
c) Se coelhos morressem cedo, andar rápido não faria bem.
d) Andar rápido faz bem.
e) Coelhos morrem cedo.

12) Assinale a opção que corresponde a uma negativa da seguinte proposição: "Se nas cidades medievais não havia lugares próprios para o teatro e as apresentações eram realizadas em igrejas e castelos, então a maior parte da população não era excluída dos espetáculos teatrais".
a) Nas cidades medievais havia lugares próprios para o teatro ou as apresentações eram realizadas em igrejas e castelos e a maior parte da população era excluída dos espetáculos teatrais.
b) Se a maior parte da população das cidades medievais era excluída dos espetáculos teatrais, então havia lugares próprios para o teatro e as apresentações eram realizadas em igrejas e castelos.
c) Se nas cidades medievais havia lugares próprios para o teatro e as apresentações não eram realizadas em igrejas e castelos, então a maior parte da população era excluída dos espetáculos teatrais.
d) Se nas cidades medievais havia lugares próprios para o teatro ou as apresentações eram realizadas em igrejas e castelos, então a maior parte da população era excluída dos espetáculos teatrais.
e) Nas cidades medievais não havia lugares próprios para o teatro, as apresentações eram realizadas em igrejas e castelos e a maior parte da população era excluída dos espetáculos teatrais.

13) A negação da proposição "Cada uma das contas apresentadas por Fernando contem, no mínimo, dois erros contábeis." corresponde a
a) Todas as contas apresentadas por Fernando contem, pelo menos, um erro contábil.
b) Nenhuma das contas apresentadas por Fernando contem, no mínimo, dois erros contábeis.
c) Cada uma das contas apresentadas por Fernando contem, no máximo, um erro contábil.
d) Pelo menos uma das contas apresentadas por Fernando contem, no máximo, um erro contábil.
e) Pelo menos uma das contas apresentadas por Fernando contem, no mínimo, dois erros contábeis.

14) A sentença "A democracia é consequência de um anseio, de um desejo do homem por decidir seu próprio destino e buscar por felicidade à sua própria maneira"
a) pode ser corretamente representada na forma $P \vee Q$, em que P e Q sejam proposições convenientemente escolhidas.
b) não é uma proposição lógica.
c) constitui uma proposição lógica simples.
d) pode ser corretamente representada na forma $P \rightarrow Q$, em que P e Q sejam proposições convenientemente escolhidas.
e) pode ser corretamente representada na forma $P \rightarrow [Q \wedge R]$, em que P, Q e R sejam proposições convenientemente escolhidas.

15) A negação da proposição: "Se o número inteiro $m > 2$ é primo, então o número m é ímpar" pode ser expressa corretamente por
a) "Se o número m não é ímpar, então o número inteiro $m > 2$ não é primo".
b) "Se o número inteiro $m > 2$ não é primo, então o número m é ímpar".
c) "O número inteiro $m > 2$ é primo e o número m não é ímpar".
d) "O número inteiro $m > 2$ é não primo e o número m é ímpar".
e) "Se o número inteiro $m > 2$ não é primo, então o número m não é ímpar".

16) A negação lógica dá frase "Maurício comprou um notebook ou Paula não foi à escola" é dada por:
a) Maurício não comprou um notebook ou Paula foi à escola.
b) Se Maurício não comprou um notebook, então Paula foi à escola.
c) Maurício não comprou um notebook e Paula não foi à escola.
d) Maurício não comprou um notebook e Paula foi à escola.

17) A frase "A Lua é um satélite ou Saturno não é o maior planeta" é equivalente a frase:
a) "A Lua é um satélite e Saturno não é o maior planeta"
b) "A Lua não é um satélite e Saturno é o maior planeta"
c) "Se a Lua não é um satélite, então Saturno não é o maior planeta"
d) "A Lua é um satélite se, e somente se, Saturno não é o maior planeta"
e) "Se a Lua é um satélite, então Saturno não é o maior planeta"

18) De acordo com a equivalência lógica, a negação da frase "Se Paulo compra um carro, então não paga à vista" é:
a) Paulo não compra um carro ou não paga à vista.
b) Paulo não compra um carro ou paga à vista.
c) Paulo compra um carro e não paga à vista.
d) Paulo não compra um carro e paga à vista.
e) Paulo compra um carro e paga à vista.

19) A frase "Se o time jogou bem, então foi campeão" é equivalente a:
a) O time jogou bem e foi campeão.
b) O time não jogou bem ou não foi campeão.
c) O time não jogou bem ou foi campeão.
d) Se o time não jogou bem, então não foi campeão.
e) O time jogou bem se, e somente se, foi campeão.

20) Marcos é juiz de direito ou André ganhou o processo equivale logicamente a dizer que:
a) Se Marcos não é juiz de direito, então André ganhou o processo.
b) Marcos é juiz de direito e André não ganhou o processo.
c) Marcos é juiz de direito se, e somente se, André ganhou o processo.
d) Se Marcos não é juiz de direito, então André não ganhou o processo.
e) Marcos não é juiz de direito ou André não ganhou o processo.

21) A frase "A vítima fez boletim de ocorrência ou o acidente foi grave" é logicamente equivalente a:
a) A vítima não fez boletim de ocorrência ou o acidente não foi grave.
b) A vítima não fez boletim de ocorrência e o acidente não foi grave.
c) A vítima fez boletim de ocorrência se, e somente se, o acidente foi grave.
d) Se a vítima não fez boletim de ocorrência, então o acidente foi grave.

22) A frase "Se Carlos trabalha, então ganha dinheiro" equivale logicamente à frase:
a) "Carlos trabalha e ganha dinheiro"
b) "Carlos trabalha ou ganha dinheiro"
c) "Carlos trabalha ou não ganha dinheiro"
d) "Carlos não trabalha ou ganha dinheiro"

23) De acordo com o raciocínio lógico-matemático, a negação da frase "O juiz negou a sentença e o réu entrou com recurso" é equivalente a frase.
a) O juiz negou a sentença ou o réu entrou com recurso.
b) O juiz não negou a sentença ou o réu não entrou com recurso.
c) O juiz não negou a sentença e o réu não entrou com recurso.
d) O juiz não negou a sentença ou o réu entrou com recurso.

24) De acordo com raciocínio lógico matemático a frase "O Brasil não foi campeão ou o presidente foi ao comício" é
equivalente a frase:
a) O Brasil foi campeão ou o presidente não foi ao comício.
b) O Brasil não foi campeão e o presidente foi ao comício.
c) Se o Brasil foi campeão, então o presidente foi ao comício.
d) O Brasil foi campeão se, e somente se o presidente não foi ao comício.

25) Uma negação lógica para a afirmação "João é rico, ou Maria é pobre" é:
a) Se João é rico, então Maria é pobre.
b) João não é rico, e Maria não é pobre.
c) João é rico, e Maria não é pobre.
d) Se João não é rico, então Maria não é pobre.
e) João não é rico, ou Maria não é pobre.

26) "Existe um lugar em que não há poluição" é uma negação lógica da afirmação:
a) Em todo lugar, não há poluição.
b) Em alguns lugares, há poluição.
c) Em todo lugar, há poluição.
d) Em alguns lugares, pode não haver poluição.
e) Em alguns lugares, não há poluição.

27) Uma afirmação equivalente para "Se estou feliz, então passei no concurso" é:
a) Se passei no concurso, então estou feliz.
b) Se não passei no concurso, então não estou feliz.
c) Não passei no concurso e não estou feliz.
d) Estou feliz e passei no concurso.
e) Passei no concurso e não estou feliz.

28) Arno, especialista em lógica, perguntou: qual a negação de "hoje é carnaval se, e somente se, for 8 ou 9 de fevereiro"?
A resposta CORRETA é:
a) Hoje não é carnaval se, e somente se, não for 8 ou 9 de fevereiro.
b) Hoje não é carnaval e não é 8 nem 9 de fevereiro.
c) Hoje não é carnaval e é 8 ou 9 de fevereiro ou hoje é carnaval e não é 8 nem 9 de fevereiro.
d) Hoje é carnaval e é 8 de fevereiro.
e) O carnaval não é no mês de fevereiro.

29) A negação de Não gosta de ler ou gosta de usar a internet é:
a) Gosta de ler e gosta de usar a internet.
b) Gosta de ler ou gosta de usar a internet.
c) Gosta de ler ou não gosta de usar a internet.
d) Gosta de ler e não gosta de usar a internet.

30) Uma proposição equivalente a Se há fumaça, há fogo, é:
a) Se não há fumaça, não há fogo.
b) Se há fumaça, não há fogo.
c) Se não há fogo, não há fumaça.
d) Se há fogo, há fumaça.

31) Falar que é verdade que "para todo policial, se o policial é civil e se o policial é investigador, então o policial está em ação" é logicamente equivalente a falar que não é verdade que:
a) alguém que não é um civil investigador está em ação.
b) existe um civil investigador que não está em ação.
c) alguns civis investigadores estão em ação
d) alguns civis que não são investigadores estão em ação.
e) nenhum civil investigador não está em ação.

32) A negação de "Se Carlos for casado então Pedro é viúvo" é:
a) Se Carlos não for casado então Pedro não é viúvo.
b) Se Carlos não for casado então Pedro é viúvo.
c) Carlos é casado e Pedro não é viúvo.
d) Carlos não é casado e Pedro não é viúvo.
e) Se Pedro não é viúvo então Carlos não é casado.

33) Considere as afirmativas a seguir.
- "Alguns homens jogam xadrez".
- "Quem joga xadrez tem bom raciocínio".
A partir dessas afirmações, é correto concluir que
a) "Todos os homens têm bom raciocínio".
b) "Mulheres não jogam xadrez".
c) "Quem tem bom raciocínio joga xadrez"
d) "Homem que não tem bom raciocínio não joga xadrez".
e) "Quem não joga xadrez não tem bom raciocínio".

34) Considere a sentença: "Se Carla gosta de peixe, então Carla sabe nadar". Uma sentença logicamente equivalente à sentença dada é:
a) Se Carla sabe nadar, então Carla gosta de peixe.
b) Se Carla não sabe nadar, então Carla não gosta de peixe.
c) Se Carla não gosta de peixe, então Carla não sabe nadar.
d) Carla gosta de peixe e sabe nadar.
e) Carla gosta de peixe ou não sabe nadar.

35) Considere a afirmação: "Nenhum médico é cego". A negação dessa afirmação é:
a) Há, pelo menos, um médico cego.
b) Nenhum cego é médico.
c) Todos os médicos são cegos.
d) Todos os cegos são médicos.
e) Todos os médicos não são cegos.

36) Utilizando o símbolo "~" para negação, a expressão lógica

se A então B

é equivalente à expressão
a) A ou B.
b) A ou ~B.
c) ~A and B.
d) ~A ou B.
e) ~A ou ~B.

37) (OBRL-21) Todos os advogados são juízes. Alguns juízes são pessoas justas. Logo,
a) alguns advogados são pessoas justas.
b) alguns advogados não são pessoas justas.
c) algumas pessoas justas são juízes.
d) todos os advogados que são juízes são pessoas justas.
e) todos os advogados são pessoas justas.

38) Considere a sentença: "Todo catarinense gosta de camarão ou é torcedor do Figueirense". A negação lógica da sentença dada é:
a) Nenhum catarinense gosta de camarão ou é torcedor do Figueirense.
b) Todo catarinense gosta de camarão, mas não é torcedor do Figueirense.
c) Todo catarinense não gosta de camarão e não é torcedor do Figueirense.
d) Algum catarinense não gosta de camarão e não é torcedor do Figueirense.
e) Algum catarinense não gosta de camarão ou não é torcedor do Figueirense.

39) Assinale a opção que apresenta a negação lógica da sentença "Todo niteroiense é fluminense."
a) "Nenhum niteroiense é fluminense."
b) "Nenhum fluminense é niteroiense."
c) "Algum niteroiense não é fluminense."
d) "Algum fluminense não é niteroiense."
e) "Todo niteroiense não é fluminense."

40) Considere a afirmação: "Se um animal não tem dentes então não morde". Uma afirmação logicamente equivalente é
a) "Se um animal tem dentes então morde."
b) "Se um animal não morde então não tem dentes."
c) "Se um animal morde então tem dentes."
d) "Existe um animal que não tem dentes e morde."
e) "Um animal não tem dentes ou morde."

41) (OBRL-21) Sejam as declarações:
- Se tenho mais de 18 anos, então posso dirigir.
- Se posso dirigir, então não vou a pé para a universidade.

Ora, se vou a pé para a universidade, podemos concluir que:
a) Eu sou pobre, mas tenho mais de 18 anos.
b) Eu sou rico, mas sou pão duro.
c) Eu não tenho mais de 18 anos e gosto de ir a pé para a universidade.
d) Eu não posso dirigir e não vou a pé para a universidade.
e) Eu não tenho mais de 18 anos e não posso dirigir.

42) A negação lógica da sentença "Se como demais, então passo mal" é
a) "Se não como demais, então não passo mal".
b) "Se não como demais, então passo mal".
c) "Como demais e não passo mal".
d) "Não como demais ou passo mal".
e) "Não como demais e passo mal".

43) Considere a sentença a seguir. "Se nasci em Rondônia ou Roraima, então sou brasileiro". Assinale a opção que apresenta uma sentença logicamente equivalente à sentença dada.
a) "Se não nasci em Rondônia nem em Roraima, então não sou brasileiro".
b) "Se nasci em Rondônia, então sou brasileiro".
c) "Se não nasci em Roraima, então não sou brasileiro".
d) "Se não sou brasileiro, então não nasci em Rondônia nem em Roraima".
e) "Se sou brasileiro e não nasci em Rondônia, então nasci em Roraima".

44) A negação de "Nenhum analista é magro" é
a) "Há pelo menos um analista magro".
b) "Alguns magros são analistas".
c) "Todos os analistas são magros".
d) "Todos os magros são analistas".
e) "Todos os analistas não são magros".

45) Considere a sentença: "Se Arlindo é baixo, então Arlindo não é atleta." Assinale a opção que apresenta a sentença logicamente equivalente à sentença dada.
a) "Se Arlindo não é atleta, então Arlindo é baixo."
b) "Se Arlindo não é baixo, então Arlindo é atleta."
c) "Se Arlindo é atleta, então Arlindo não é baixo."
d) "Arlindo é baixo e atleta."
e) "Arlindo não é baixo e não é atleta."

46) (OBRL-15) Isaura, Emengarda, Zuleide e Astropolo, todos fazem parte da mesma família. Observe as informações abaixo e responda o que se pede:

- Isaura é neta de Emengarda;
- Emengarda é mãe de Zuleide;
- Astropolo é pai de Isaura;
- Zuleide não tem filhos.

De acordo com as informações é possível garantir que:
a) Astropolo é filho de Emengarda;
b) Astropolo é irmão de Zuleide;
c) Isaura é sobrinha de Zuleide;
d) Zuleide é casada com Astropolo;
e) Zuleide é mãe de Isaura.

47) (OBRL-14) Dadas às proposições lógicas simples: A, B, C, e D, com os seguintes valores lógicos: V, F, V, V com V indicando que a proposição é verdadeira e F, indicando que é falsa. Observe as três
proposições compostas abaixo:

$$[(\sim B \leftrightarrow C)], [(\sim A \rightarrow D)], [(\sim A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)]$$

Os valores lógicos obtidos das seguintes proposições compostas são respectivamente:
a) V, F, F
b) V, V, V
c) V, F, V
d) F, F, V
e) F, V, F

48) Considere a afirmação: "Eu recebi o boleto e não paguei".
A negação lógica dessa afirmação é
a) "Eu não recebi o boleto e não paguei."
b) "Eu não recebi o boleto e paguei."
c) "Eu recebi o boleto e paguei."
d) "Eu não recebi o boleto ou não paguei."
e) "Eu não recebi o boleto ou paguei."

49) Considere verdadeira a afirmação: "Todo vegetal verde é saudável." É correto concluir que:
a) Todo vegetal saudável é verde.
b) Todo vegetal que não é saudável não é verde.
c) Todo vegetal que não é verde não é saudável.
d) Alguns vegetais verdes não são saudáveis.
e) Alguns vegetais que não são saudáveis são verdes.

50) Considere verdadeira a afirmação: "Todo parlamentar conhece bem a Constituição".
É correto concluir que
a) "Se uma pessoa conhece bem a Constituição então é parlamentar."
b) "Se uma pessoa não é um parlamentar então não conhece bem a Constituição."
c) "Se uma pessoa não conhece bem a constituição então não é parlamentar."
d) "Existe um parlamentar que não conhece bem a Constituição."
e) "Não existe pessoa que conheça bem a Constituição e não seja parlamentar."

51) (OBRL-14) Considere as afirmações abaixo.
I. O número de linhas de uma tabela-verdade é sempre um número ímpar.
II. A proposição "$(1 < -1) \leftrightarrow (8 - 3 = 5)$" é verdadeira.
III. A proposição "Se 8 é primo então 8 é par" é verdadeira.
É verdade o que se afirma APENAS em:
a) I b) II c) III d) I e II e) I e III

52) Considerando que a afirmação "Nenhum pescador sabe nadar" não é verdadeira, é correto concluir que
a) "Há, pelo menos, um pescador que sabe nadar".
b) "Quem não é pescador não sabe nadar".
c) "Todos os pescadores sabem nadar".
d) "Todas as pessoas que sabem nadar são pescadores".
e) "Ninguém que sabe nadar é pescador".

53) Considere a sentença:
"Todo estudante que gosta de Matemática também gosta de Ciências Biológicas".
Considerando que essa sentença é falsa, é correto concluir que:
a) "Todo estudante que não gosta de Matemática gosta de Ciências Biológicas".
b) "Nenhum estudante que gosta de Matemática também gosta de Ciências Biológicas".
c) "Todo estudante que gosta de Matemática não gosta de Ciências Biológicas".
d) "Algum estudante que gosta de Matemática não gosta de Ciências Biológicas".
e) "Algum estudante que não gosta de Matemática gosta de Ciências Biológicas".

54) Se não é verdade que "Todo soteronito é soteronoso", então é correto afirmar que
a) "Nenhum soteronito é soteronoso".
b) "Todo soteronoso é soteronito".
c) "Algum soteronito não é soteronoso".
d) "Algum soteronoso não é soteronito".
e) "Algum soteronito é soteronoso".

55) (OBRL-14) Na resolução de problemas com os conectivos, é de fundamental importância lembrar como usar um conectivo em uma proposição composta, para atribuirmos um valor lógico verdadeiro (V) ou falso (F). Considere as proposições abaixo verdadeiras, descubra o valor lógico individual de cada proposição simples (átomo) e relacione o texto com as alternativas dadas.
I. A estrela do time de futebol está machucada ou foi a uma festa na praia.
II. A estrela do time não foi a uma festa na praia,
logo:
a) A estrela do time de futebol está machucada e foi a uma festa na praia;
b) A estrela do time de futebol não está machucada;
c) A estrela do time foi a uma festa na praia;
d) A estrela do time não foi a uma festa na praia ou A estrela do time de futebol não está machucada;
e) A estrela do time de futebol não está machucada e A estrela do time não foi a uma festa na praia;

56) Considerando p e q duas proposições quaisquer, assinale a alternativa que representa, logicamente, uma tautologia.
a) $\sim p \wedge p$ b) $\sim p \wedge \sim q$ c) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ e) $p \vee q$

57) (OBRL-22) Na lógica proposicional, definimos que uma tautologia é uma proposição composta que será sempre verdadeira, independentemente do valor lógico das premissas. Então podemos, observando as afirmações a seguir, concluir que:
I. Se P e Q forem proposições simples, então a proposição $\neg[P \vee (\neg Q)] \leftrightarrow [(\neg P) \wedge Q]$ é uma tautologia.
II. A proposição $P \vee \neg P$ representa uma tautologia.
III. A proposição $\neg P \vee \{\neg P \rightarrow Q\}$ representa uma tautologia.
IV. A proposição $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ será, sempre, uma tautologia.
a) Apenas I, II e IV estão corretas b) Apenas II, IV estão corretas
c) Apenas I, III e IV estão incorretas d) Apenas I e III estão corretas
e) Todas estão corretas

58) Considere a sentença: "Se corro ou faço musculação, então fico cansado".
Uma sentença logicamente equivalente a essa é:
a) Se não corro ou faço musculação, então não fico cansado.
b) Se não corro e não faço musculação, então não fico cansado.
c) Não corro e não faço musculação ou fico cansado.
d) Corro ou faço musculação e não fico cansado.
e) Não corro ou não faço musculação e fico cansado.

59) (OBRL-14) Considere que cada pessoa cujo nome está indicado na tabela abaixo exerça apenas uma profissão. Se a célula que é o cruzamento de uma linha com uma coluna apresenta o valor V, então a pessoa correspondente àquela linha exerce a profissão correspondente àquela coluna; se o valor for F, então a pessoa correspondente à linha não exerce a profissão correspondente àquela coluna. Assim, de acordo com a tabela, Barbara é cardiologista, Bianca não é dentista nem Bruno é pneumologista.

NOME	DENTISTA	PNEUMOLOGISTA	CARDIOLOGISTA
BRUNO		F	
BARBARA			V
BIANCA	F		

Considerando as informações e a tabela apresentadas acima, é correto afirmar que:
a) "Bruno não é dentista ou Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.
b) "Se Bruno é dentista então Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.
c) "Bruno é dentista e Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.
d) "Bruno não é dentista e Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.
e) "Bruno é dentista ou Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.

60) Considere a sentença: "Se não estou cansado, então vejo televisão ou vou ao cinema".
A negação lógica dessa sentença é:
a) Se estou cansado, então não vejo televisão e não vou ao cinema.
b) Se estou cansado, então vejo televisão ou vou ao cinema.
c) Se não vejo televisão e não vou ao cinema, então estou cansado.
d) Não estou cansado e não vejo televisão e não vou ao cinema.
e) Estou cansado ou vejo televisão ou vou ao cinema.

61) (OBRL-14) Adamaqui, Bruno e Celeste são amigos. Um deles é engenheiro, o outro, psicólogo, e o terceiro, é professor. Sabe-se que: Bruno não é o psicólogo; Celeste não é engenheira; Adamaqui não é o professor e nem o engenheiro. Com base nas informações, conclui-se corretamente que:
a) Celeste não é a professora. b) Bruno não é o engenheiro.
c) Bruno é o professor. d) Celeste não é a psicóloga.
e) Adamaqui é o engenheiro.

62) Certo dia Cesar disse: "Eu vim e venci". Sabendo que a afirmação acima não é verdadeira, é correto concluir que Cesar
a) não veio e venceu.
b) veio e não venceu.
c) não veio e não venceu.
d) não veio ou não venceu.
e) se veio, não venceu.

63) (EFOMM-23) Considere as seguintes afirmações como verdadeiras:
"Se é noite e não chove, então Luiz vai ao futebol."
"Se não faz frio ou Luiz vai ao futebol, então Paula vai ao futebol."
Considerando que, em determinada noite, Paula não foi ao futebol, é correto afirmar que,
a) não fez frio, Luiz não foi ao futebol e choveu.
b) fez frio, Luiz foi ao futebol e choveu.
c) fez frio, Luiz não foi ao futebol e choveu.
d) fez frio, Luiz não foi ao futebol e não choveu.
e) não fez frio, Luiz foi ao futebol e não choveu.

64) (OBRL-22) Uma forma de verificação da validade de um argumento é considerar a conclusão falsa. Pode-se utilizar este método, quando for inviável a aplicação de outros métodos mais tradicionais e a conclusão seja uma proposição simples ou uma disjunção (conectivo ou) ou uma condicional (se então). Neste método, vamos considerar as premissas como verdadeiras e a conclusão como falsa. Uma análise detalhada das premissas deverá ser feita para comprovar a existência desta situação. Se houver confirmação de que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, sem encontrarmos nenhuma contradição, então o argumento será considerado inválido, caso contrário o argumento será considerado válido. Sejam as premissas a seguir verdadeiras:
I. Se um estoico é prudente, então ele é competente.
II. Se um estoico não é prudente, então ele é ignorante.
III. Se um estoico é ignorante, então ele não tem esperanças.
IV. Se um estoico é competente, então ele não é violento.
Para que se obtenha um argumento válido, é correto concluir que se um estoico:
a) não é violento, então ele é prudente.
b) não é competente, então ele é violento.
c) é violento, então ele não tem esperanças
d) não é prudente, então ele é violento.
e) não é violento, então ele não é competente.

65) Os advogados Miguel e Lucas conversam sobre determinado processo que vão receber.
- Miguel: Se esse processo é de "danos morais" então tem 100 páginas ou mais.
- Lucas: Não é verdade.
O que Lucas disse é logicamente equivalente a:
a) esse processo não é de danos morais e tem 100 páginas ou mais;
b) esse processo não é de danos morais ou tem menos de 100 páginas;
c) se esse processo não é de danos morais então tem 100 páginas ou mais;
d) se esse processo é de danos morais então tem 100 páginas ou menos;
e) esse processo é de danos morais e tem menos de 100 páginas.

66) (OBRL-23) Sabendo que $V(p) = V(r) = V$ e $V(q) = V(s) = F$, avalie o valor lógico de cada uma das proposições:
I) $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \wedge \neg s)$
II) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow r)$
III) $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \vee r) \wedge s$
IV) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \rightarrow (p \vee s)$
Assinale a relação correta entre proposição e valor lógico:
a) $V(I) = V$, $V(II) = V$, $V(III) = V$, $V(IV) = V$
b) $V(I) = F$, $V(II) = F$, $V(III) = V$, $V(IV) = V$
c) $V(I) = V$, $V(II) = V$, $V(III) = F$, $V(IV) = F$
d) $V(I) = F$, $V(II) = V$, $V(III) = F$, $V(IV) = V$
e) $V(I) = F$, $V(II) = V$, $V(III) = F$, $V(IV) = F$

67) Considere a afirmativa: "Este mês tem 31 dias e o mês que vem também terá". A negação dessa afirmativa é
a) "Este mês tem 30 dias e o mês que vem terá 31".
b) "Este mês não tem 31 dias e o mês que vem também não terá".
c) "Este mês tem 31 dias e o mês que vem não terá".
d) "Este mês tem 30 dias ou o mês que vem também terá".
e) "Este mês não tem 31 dias ou o mês que vem não terá 31 dias"

68) Um professor afirmou: "Quem acertar todas as questões de múltipla-escolha vai tirar conceito A." Alberto é um de seus alunos. Uma consequência lógica da sentença do professor é:
a) se Alberto tirou conceito A, então ele acertou todas as questões de múltipla-escolha.
b) se Alberto não tirou conceito A, então ele acertou todas as questões de múltipla-escolha.
c) se Alberto não tirou conceito A, então ele errou todas as questões de múltipla-escolha.
d) se Alberto não tirou conceito A, então ele errou exatamente uma questão de múltipla-escolha.
e) se Alberto não tirou conceito A, então ele errou pelo menos uma questão de múltipla-escolha.

69) Considere a sentença: "Rubens tem mais de 18 anos e sabe dirigir".
A negação lógica dessa sentença é:
a) Rubens não tem mais de 18 anos e não sabe dirigir.
b) Rubens não tem mais de 18 anos ou não sabe dirigir.
c) Rubens tem mais de 18 anos e não sabe dirigir.
d) Rubens não tem mais de 18 anos e sabe dirigir.
e) Rubens tem mais de 18 anos ou sabe dirigir.

70) Considere a sentença: "Se pratico esportes, então fico feliz". A negação lógica dessa sentença é
a) "Se não pratico esportes, então não fico feliz."
b) "Se não pratico esportes, então fico feliz."
c) "Se pratico esportes, então não fico feliz."
d) "Pratico esportes e não fico feliz."
e) "Não pratico esportes e fico feliz."

71) Considere a sentença: "Renato viajou e não telefonou para sua mãe". A negação lógica dessa sentença é
a) "Renato viajou e telefonou para sua mãe."
b) "Renato não viajou e não telefonou para sua mãe."
c) "Renato não viajou ou telefonou para sua mãe."
d) "Renato viajou ou não telefonou para sua mãe."
e) "Renato não viajou ou não telefonou para sua mãe."

72) (EFOMM-22) A afirmação "Carolina é alta, ou Bruno não é baixo, ou Renan é calvo" é falsa. Segue-se, pois, que é verdade que
a) se Bruno é baixo, então Carolina é alta, e, se Bruno não é baixo, então Renan não é calvo.
b) se Carolina é alta, então Bruno é baixo, e, se Bruno é baixo, então Renan é calvo.
c) se Carolina é alta, então Bruno é baixo, e, se Bruno não é baixo, então Renan não é calvo.
d) se Bruno não é baixo, então Carolina é alta, e, se Bruno é baixo, então Renan é calvo.
e) se Carolina não é alta, então Bruno não é baixo, e, se Renan é calvo, então Bruno não é baixo.

73) (EFOMM-24) Considere cinco funcionários (A, B, C, D, E) da empresa INCÓGNITA LTDA. Que trabalham ou no setor X ou no setor Y. Sabe-se que os funcionários do setor X sempre falam a verdade, enquanto os funcionários do setor Y sempre mentem. Sabe-se que:
• A é do setor X;
• B se diz do setor X;
• C diz que D é do setor X;
• D diz que B e E não podem ser ambos do setor X; e
• E diz que A e B são do setor X.
Quantos funcionários trabalham no setor X?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

74) (EN-18) Chama-se conjunto-verdade de uma sentença aberta p(x) em um conjunto A o conjunto de todos os elementos de $a \in A$, tais que p(a) é uma proposição verdadeira (V). Sejam p(x), q(x) e r(x) sentenças abertas em um mesmo conjunto A. Encontre o conjunto-verdade da sentença aberta composta $(p(x) \rightarrow q(x)) \vee \sim r(x)$, em função de V_p, V_q e V_r, e assinale a opção correta.
a) $C_A V_p \cup (V_q \cup C_A V_r)$ b) $V_r \cap (C_A V_q \cup C_A V_p)$
c) $C_A V_q \cup (V_p \cup C_A V_r)$ d) $C_A V_r \cup (V_q \cap C_A V_p)$
e) $V_p \cap (C_A V_q \cup C_A V_r)$

75) Considere a sentença: "Se João gosta de goiaba, então gosta de abacate." Uma sentença logicamente equivalente à sentença dada é
a) "João não gosta de goiaba ou gosta de abacate".
b) "Se João não gosta de goiaba, então não gosta de abacate."
c) "Se João gosta de abacate, então gosta de goiaba."
d) "João gosta de goiaba e não gosta de abacate."
e) "João gosta de goiaba ou gosta de abacate."

76) (EFOMM-22) Assinale a alternativa que corresponde à negação da afirmação abaixo.

Todo nauta é corajoso e sonhador.

a) Todo nauta não é corajoso e sonhador.
b) Todo nauta não é corajoso ou sonhador.
c) Existe nauta que não é corajoso e não é sonhador.
d) Existe nauta que não é corajoso ou não é sonhador.
e) Existe nauta que não é corajoso ou é sonhador.

77) (EN-89) Dada a proposição $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ podemos afirmar que é:
a) logicamente falsa b) uma tautologia
c) equivalente a $\underline{(p \vee q)} \Leftrightarrow r$ d) equivalente $(p \Leftrightarrow q) \vee r$
e) equivalente a $(p \vee q) \Leftrightarrow r$

78) (EN-94) A negação da proposição: "$x \neq 3$ e $x < 2$", é:
(A)"$x = 3$ e $y \geq 2$" (B)"$x = 3$ e $y > 2$" (C)"$x = 3$ ou $y \geq 2$"
(D)"$x \neq 2$ e $y < 3$" (E)"$x \neq 3$ ou $y < 2$"

79) Uma sentença logicamente equivalente à sentença "Se Pedro é torcedor da Chapecoense, então ele nasceu em Chapecó" é:
a) Se Pedro não é torcedor da Chapecoense, então ele não nasceu em Chapecó.
b) Se Pedro nasceu em Chapecó, então ele é torcedor da Chapecoense.
c) Pedro é torcedor da Chapecoense e não nasceu em Chapecó.

d) Pedro não é torcedor da Chapecoense ou nasceu em Chapecó.
e) Pedro é torcedor da Chapecoense ou não nasceu em Chapecó.

80) (OBRL-23) Quantificadores são palavras/expressões que referem a quantidades tais como "todos" e "alguns" e indicam para quantos elementos do domínio um dado predicado é verdadeiro. ∀: denota "para todos" e é chamado de quantificador universal. ∃: denota "existe" e é chamado de quantificador existencial.
Pela definição da negação de uma proposição universal, temos:

$$\neg(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \mid \neg(P(x) \rightarrow Q(x)).$$

P: Para todas as pessoas nascidas em Canindé, se a pessoa nascida em Canindé é loura então a pessoa nascida em Canindé tem olhos azuis.
A negação de P está, respeitando os quantificadores e a lógica proposicional, bem expressa em:
a) Existe uma pessoa nascida em Canindé, se a pessoa nascida em Canindé não é loura então a pessoa nascida em Canindé não tem olhos azuis.
b) Existe uma pessoa nascida em Canindé, se a pessoa nascida em Canindé tem olhos azuis então a pessoa nascida em Canindé não é loura.
c) Existe uma pessoa nascida em Canindé, a pessoa nascida em Canindé não é loura e a pessoa nascida em Canindé não tem olhos azuis.
d) Existe uma pessoa nascida em Canindé, a pessoa nascida em Canindé é loura e a pessoa nascida em Canindé não tem olhos azuis.
e) Para todas pessoas nascidas em Canindé, a pessoa nascida em Canindé é loura e a pessoa nascida em Canindé não tem olhos azuis.

81) (EN-24) Na Escola Naval, um oficial afirmou que: "Se todos os navios estão fundeados, então hoje é dia de licença pagamento ou os nautas não estão de serviço". Assinale a opção que apresenta a afirmativa que equivale à afirmação do oficial.
a) Se todos os navios não estão fundeados, então hoje não é dia de licença pagamento ou os nautas estão de serviço.
b) Se hoje não é dia de licença pagamento e os nautas estão de serviço, então há navio que não está fundeado.
c) Se hoje é dia de licença pagamento ou os nautas não estão de serviço, então todos os navios estão fundeados.
d) Se hoje não é dia de licença pagamento ou os nautas estão de serviço, então há navio que não está fundeado.
e) Se hoje é dia de licença pagamento e os nautas estão de serviço, então há navio que não está fundeado.

GABARITOS

Capítulo 1: Limite

01) c **02)** d **03)** e
04) d **05)** e **06)** e
07) e **08)** d **09)** d
10) a **11)** d **12)** b
13) a **14)** – 1 **15)** a
16) c **17)** a **18)** b
19) d **20)** b **21)** c
22) a **23)** e **24)** d
25) b **26)** d **27)** c
28) d **29)** c **30)** a
31) d **32)** d **33)** a
34) b **35)** e **36)** c
37) c **38)** d **39)** b
40) a **41)** e **42)** a
43) 2 **44)** a) = – 8, b = 5,c = 14, m = 2, n = 0, p = – 2
45) d **46)** a **47)** a
48) e **49)** b **50)** d
51) c **52)** a **53)** a
54) d **55)** e **56)** d
57) e **58)** a **59)** c
60) d **61)** a **62)** e
63) c **64)** e **65)** e
66) c **67)** a **68)** c
69) b **70)** c **71)** a
72) d **73)** a **74)** e
75) d **76)** a **77)** e
78) b **79)** d **80)** a
81) e **82)** e **83)** d

84) $+\infty$ **85)** c **86)** e^{-2}
87) i) $a \in [0, 1]$; ii) $a = 0$ ou $a = 1$; iii) $a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
88) c **89)** c **90)** $e^{-1/2}$
91) e^2 **92)** e^{-2} **93)** $b = \sqrt{5}$

Capítulo 2: Derivada

01) c **02)** d **03)** b
04) b **05)** b **06)** c
07) d **08)** e **09)** e
10) a **11)** b **12)** c
13) c **14)** a **15)** a
16) c **17)** a **18)** e
19) a **20)** e **21)** a
22) $m \leq 1/12$ **23)** d **25)** b
26) $(x^2 - 379)\ \text{sen}\ x - 40x.\cos x$ **27)** c
28) d **29)** $(-1/2, -6)$ **30)** e
31) não é derivável em $x = 6$ e a derivada em $x = 5/2$ tende pra infinito
32) raízes $-1, -1, 2$ e 2 **33)** a
34) a **35)** d **36)** d
37) b **38)** c **39)** b
40) d **41)** a **42)** c
43) e **44)** b **45)** e
46) c **47)** b **48)** c
49) $i.\cot(k\pi/n)$, $k = 1, 2, ..., n-1$ **50)** d
51) d **52)** d **53)** 0
54) c **55)** d **56)** d
57) 45 **58)** -1 **59)** e

60) $px - \sqrt{ey} + \frac{e}{2} = 0$ **61)** e **62)** d

63) b **64)** a **65)** a
68) $k = 4$ **69)** b **70)** a
71) a **72)** c **73)** a

74) a) $Df = \Re_+^* - \{1\}$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; b) g é contínua e não diferenciável em $x = 1$

75) d **76)** b **77)** b
78) a **79)** d **80)** a
81) e **82)** a **83)** b
84) d **85)** a **86)** a
87) e **88)** d **89)** d
90) d **92)** c **93)** c
94) a **95)** d **96)** d
97) c **98)** b **99)** b
100) b **101)** c **102)** d
103) a **104)** c **105)** d
106) c **107)** e **108)** a
109) a **110)** a **111)** a
112) c **113)** a **114)** a

115) a **116)** c **117)** e
118) c **119)** d **120)** b
121) a **122)** c **123)** b
124) c

125) Máximo: $\left(1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$, Mínimo: $\left(1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$, Inflexão: $(-1, 0)$, $\left(2-\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$ e $\left(2+\sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$ e Assíntota em $y = 1$.

126) a) $x = -1$; bi) $\pm\sqrt{3}$; bii) 0 e $\pm\sqrt{3}$
127) a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-1, 1]$;
b) descontínua em $x = -2$ e $x = 1$ e dão diferenciável em $x = -2$, $x = 1$ e $x = 0$.
c) $f(x)$ é constante para $x < -2$, crescente para $-2 < x < 0$, decrescente para $0 < x < 1$ e também decrescente para $x > 1$.

128) (0, 1) é máximo local, $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ são pontos de inflexão, assíntota horizontal em $y = e$ e assíntotas verticais em $x = \pm 1$.
129) a) (2,-3/2) é mínimo, não há máximo, (3, -4/3) é ponto de inflexão
130) $(-1, 6)$ inflexão, (0, 0) mínimo local, $(2, 3\sqrt[3]{4})$ máximo local
131) a) f é crescente $\rightarrow x \in]1, \infty[$; f é decrescente $\rightarrow x \in [0,1[$;
b) concavidade voltada pra baixo $\rightarrow x \in]0, \sqrt{3}[$, concavidade voltada pra cima $\rightarrow x \in]\sqrt{3}, \infty[$;
c) máxima em $x = 0$; mínimo em $x = 1$; ponto de flexão em $x = \sqrt{3}$

132) $k_{MIN} = 4/3$ **133)** b **134)** b
135) e **136)** b **137)** b
138) d **139)** d **140)** a
141) $p = \pm 4$ ou $p = \pm 4i$ **142)** b **143)** $p = -6$ e $q = 1$

144) $d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}$ **146)** $a = 3$ e $b = -4$ **147)** $a = n/(n-2)$

148) $\alpha = 15$, $\beta = -16$ e $\gamma = 15$

149) $P(x) = \frac{35}{16}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right]$ **150)** $-n/2$

151) -1 **152)** 7 **153)** $\left(\frac{a}{a-1}\right)^2$

154) b **155)** $(n+1)(n+4).2^{n-2}$ **156)** $4n(n-1)3^{n-2}$
157) $3n.4^{n-1}$ **159)** a **160)** d
161) d **162)** c **163)** 1/2

164) d **165)** e **166)** b
167) e **168)** c **169)** b
170) b **171)** 0 **172)** 0
173) 0 **174)** 1 **175)** 5/7

Capítulo 3: Integral

01) c **02)** b **03)** c
04) c **05)** d **06)** d
07) e **08)** d **09)** d
10) c **11)** b **12)** a
13) c **14)** a **15)** c
16) c **17)** e **18)** a
19) a **20)** b **21)** c
22) a **23)** d **24)** e
25) c **26)** c **27)** b
28) d **29)** d **30)** e
31) a **32)** a **33)** d
34) e **35)** b **36)** c
37) b **38)** b **39)** d
40) c **41)** a **42)** b
43) b **44)** a) as curvas são assintóticas e crescentes; b) não
45) a **46)** a **47)** b
48) b **49)** d **50)** a
51) e **52)** a **53)** d
54) b **55)** c **56)** c
57) c **58)** a **59)** d
60) d **61)** e **62)** a
63) c **64)** e **65)** c
66) e **67)** b **68)** a
69) b **70)** d **71)** b
72) b **73)** e **74)** b
75) d **76)** a **77)** b
78) b **79)** b **80)** b
82) $-x^2+4x+1$ **83)** a) 98/3; b) **84)** mn/3
85) 736/15

86) $p(x)=\frac{1}{2}\left[ax^4+2bx^3+6cx^2+\frac{6abc-b^3}{a^2}x+\frac{5ac^2-b^2c}{a^2}\right]$

Capítulo 4: Vetor

01) 22 **02)** 20 **03)** $\alpha=4$ e $\beta=-1$.
04) – 13 **05)** 10 **06)** ± 3/5
07) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ **08)** 90° **09)** 90°
10) arc cos $2/\sqrt{7}$ **11)** $-3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ **12)** $2\vec{i}-3\vec{j}$
13) 6 **14)** 16 **15)** 14
16) 5 **17)** 3 **18)** 11
19) (0, 8, 0) ou (0, – 7, 0) **20)** ± 4 **21)** – 10
22) 17 **23)** – 4 ou – 17/4 **24)** 120°
25) 75,52° **26)** 33,6° **27)** a = 1 e b = – 2
28) (0, 0, – 28) ou (12, 24, 8) **29)** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
30) a) Não; b) $\sqrt{113}/2$ **31)** 1/2
32) a) (– 16/17, – 16/17, 24/17); b) Não existe **33)** $\sqrt{77}$
34) $\pm\left(\frac{7}{5\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$ **36)** 2 ou – 3
37) D(51/2, 0, 0) ou D(– 45/2, 0, 0) **39)** 27
40) a **41)** b **42)** b
43) d **44)** d **45)** d
46) e **47)** e **48)** a
49) c **50)** a **51)** b
52) e **53)** b **54)** c
55) b **56)** e **57)** b
58) d **59)** b **60)** e
61) a **62)** c **63)** d
64) a **65)** e

Capítulo 5: Geometria Analítica no IR^3

01) a **02)** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ **03)** c
04) e **05)** (0, 0, – 2) ou (0, 0, – 82/13)
06) S = $2\sqrt{3}$ e h = $\sqrt{6}$ **07)** 2x + y – 2z ± 9 = 0 **08)** c
09) (– 4, 2, 5) **10)** d **11)** x – y + z – 2 = 0
12) arc cos $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **13)** a
14) P = (0, –2, 0) ou P ' = (0, 4, 0) **15)** (2, 0, 2)
16) 2x – y – z + 1 = 0 **17)** d **18)** x – y + 1 = 0

19) a

20) $-9/13$

21) a) 1/3; b) não existe m; c) $\frac{7 \pm \sqrt{829}}{10}$

22) m = 0 ou m = 3/2

23) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$

24) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

25) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

26) a) $\begin{cases} y = z + 2 \\ x = z + 1 \end{cases}$; b) $\pi/6$

27) As retas são reversas

28) $10y + z - 7 = 0$

29) m = – 4/3 e n = 5/3

30) $\pi/3$

31) $\sqrt{2}$

32) $\frac{x+3}{5} = \frac{y+8}{-7} = \frac{z+13}{3}$

33) $3x + 2y - z + 4 = 0$

34) $\sqrt{2}$

35) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{0}$

36) (5, 1, 4)

37) (3, – 2, 4)

38) (1, – 1, 2)

39) (– 1/2, – 3, 11/4)

40) $2x - 3y - 4z - 7 = 0$

41) $\frac{x-6}{-6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{0}$

42) b

43) e

44) e

45) d

46) a

47) e

48) b

49) (0, – 3, – 9)

50) e

51) d

52) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{\pm\sqrt{6}} = \frac{z-2}{1}$

53) e

54) c

55) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{\pm\sqrt{2}}$

56) c

57) d

58) a = 14 e b = 10

59) e

60) e

61) a

62) $3x - y - 5z + 10 = 0$

63) d

64) d

65) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{3}$

66) a

67) $\begin{cases} x = t + 2h \\ y = -3 + 2t + h \\ z = 2 - t - h \end{cases}$

68) d

69) $\begin{cases} x = 3 \\ z = 2y - 8 \end{cases}$

70) d

71) d

Capítulo 6: Lógica

01) d
02) b
03) a
04) d
05) d
06) c
07) a
08) a
09) e
10) c
11) e
12) e
13) d
14) c
15) c
16) d
17) c
18) e
19) c
20) a
21) d
22) d
23) b
24) c
25) b
26) c
27) c
28) c
29) d
30) c
31) b
32) c
33) d
34) b
35) a
36) d
37) c
38) d
39) c
40) c
41) e
42) c
43) d
44) a
45) c
46) c
47) b
48) e
49) b
50) c
51) c
52) a
53) d
54) c
55) d
56) c
57) e
58) c
59) e
60) d
61) d
62) d
63) c
64) c
65) e
66) d
67) e
68) e
69) b
70) d
71) c
72) c
73) c
74) a
75) a
76) d
77) b
78) c
79) d
80) d
81) b